کتاب کار و آموزش

هندسه دهم

پایه دهم ریاضی و فیزیک

بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

پایهٔ دهم

دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۵

تدوین و گردآوری: روح الله ولی زاده

سالتحصیلی 97–96

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

فصل ۱ : ترسیم‌های هندسی و استدلال .....
درس اول : ترسیم‌های هندسی .....
درس دوم : استدلال.....
فصل ۲ : قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن .....
درس اول : نسبت و تناسب در هندسه.....
درس دوم : قضیهٔ تالس.....
درس سوم : تشابه مثلث‌ها .....
درس چهارم : کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها .....
فصل ۳ : چند ضلعی‌ها.....
درس اول : چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها .....
درس دوم : مساحت و کاربردهای آن .....
فصل ۴ : تجسم فضایی.....
درس اول : خط، نقطه و صفحه .....
درس دوم : تفکر تجسمی .....

بارم بندی

نوبت اول	نوبت دوم	نوبت شهریور

فصل ۱	۹	۳	۳
فصل ۲	۱۱	۴	۵
فصل ۳	-	۷	۷
فصل ۴	-	۶	۵

هندسه پایه دهم

تدوین و گردآوری: ولی زاده

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

طرح درس سالانه هندسه (۱)

پایه: دهم رشته: ریاضی وفیزیک نام دبیر: صفحه:۱

ماه	هفته	صفحات تدریس یا حل تمرین		رئوس مطالب
		از صفحه	تا صفحه	
مهر	اوّل	۱۰	۱۳	ترسیم های هندسی، خواص نیمساز زاویه، خواص عمود منصف پاره خط
	دوّم	۱۴	۱۷	رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط، حل تمرین
	سوّم	۱۸	۲۱	استدلال ، استقرا و استنتاج
	چهارم	–	–	آزمون مستمر
آبان	اوّل	۲۲	۲۵	قضیه ، عکس قضیه
	دوّم	۲۶	۲۸	قضیه های دوشرطی ، حل تمرین
	سوّم	۳۰	۳۳	نسبت و تناسب ، معرفی نسبت های مختلف ، واسطه ی هندسی
	چهارم	۳۴	۳۷	قضیه ی تالس ، عکس قضیه ی تالس ، حل تمرین
آذر	اوّل	–	–	آزمون مستمر
	دوّم	۳۸	۴۱	تشابه مثلث ها و قضیه های آن
	سوّم	۴۲	۴۴	قضیه ی فیثاغورس ، روابط طولی در مثلث قائم الزوایه ، حل تمرین
	چهارم	۴۵	۴۸	کاربردهایی از قضیه ی تالس ، قضیه ی نیمساز ، نسبت اجزای فرعی
دی	اوّل	۴۹	۵۲	حل تمرین ، آزمون مستمر
	دوّم	آزمون نوبت اوّل		
	سوّم			
	چهارم	۵۴	۵۷	تعریف چندضلعی ، قطر چندضلعی، چندضلعی های محدب و مقعر، چهارضلعی های مهم ، متوازی الاضلاع

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

هندسه پایه دهم

تدوین و گردآوری: ولی زاده

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

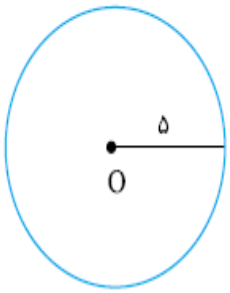
پایه: دهم رشته: ریاضی و فیزیک نام دبیر: **صفحه:۲**

ماه	هفته	صفحات تدریس یا حل تمرین		رئوس مطالب
		از صفحه	تا صفحه	
بهمن	اوّل	۵۸	۶۱	ادامه ی متوازی الاضلاع ، ویژگی های مهم مثلث قائم الزاویه ، لوزی
	دوّم	۶۲	۶۴	ذوزنقه ، حل تمرین
	سوّم	۶۵	۶۸	مساحت و کاربردهای آن در حل مسائل
	چهارم	–	–	آزمون مستمر
اسفند	اوّل	۶۹	۷۱	نقاط شبکه ای و مساحت
	دوّم	۷۲	۷۶	حل تمرین
	سوّم	۷۸	۸۱	خط، نقطه و صفحه و حالت های مختلف« دو خط» و« خط و صفحه» در فضا
	چهارم	۸۲	۸۶	حالت های مختلف دو صفحه ، تعامد دو صفحه ، حل تمرین
فروردین	اوّل	تعطیلات نوروز		
	دوّم			
	سوّم	۸۷	۹۰	تفکر تجسمی
	چهارم	–	–	آزمون مستمر
اردیبهشت	اوّل	۹۱	۹۳	حل تمرین ، برش
	دوّم	۹۴		حل تمرین ، دوران حول محور
	سوّم	آزمون نوبت دوّم		
	چهارم			

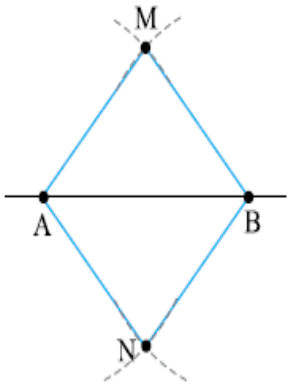
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

درس اول: ترسیم‌های هندسی

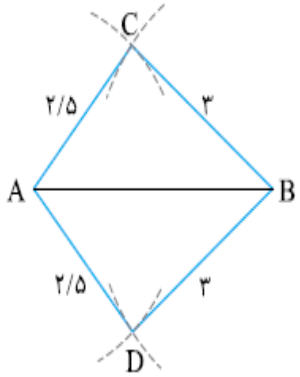
با این‌که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها و حل کردن مسأله‌ها ترسیم شکل‌ها خیلی مهم است، اما خیلی مواقع ترسیم حدودی و غیر دقیق شکل‌ها هم برای برآوردن منظورمان کافی است. با این حال، مواردی پیش می‌آید که ترسیم دقیق مهم است، مثلاً، هنگام ترسیم نقشه‌ی راه‌ها، نقشه‌ی ساختمان، یا حتی نقشه‌ی ابزار ساده یا پیچیده. در این درس، با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.



فرض کنید O نقطه‌ای در صفحه باشد. اگر به مرکز O دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کنیم، فاصله‌ی همه‌ی نقطه‌های روی این دایره تا نقطه‌ی O برابر با ۵ است. در ضمن، هیچ نقطه‌ی دیگری در صفحه نیست که فاصله‌اش تا نقطه‌ی O برابر با ۵ باشد.



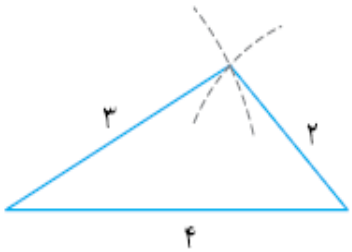
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند. اگر دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنیم، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این نقطه‌ها را M و N بنامید. در این صورت فاصله‌ی M و N از A و B یکسان است.



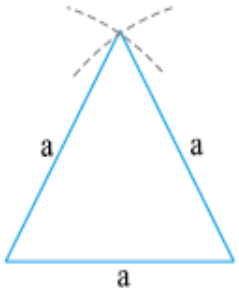
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۲/۵ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی A کمانی می‌زنیم. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی B کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را C و D بنامید. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A برابر با ۲/۵ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با ۳ سانتی‌متر است. همین‌طور، فاصله‌ی نقطه‌ی D تا نقطه‌ی A برابر با ۲/۵ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با ۳ سانتی‌متر است.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مثال: می‌خواهیم مثلثی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس از یک سر آن کمانی به شعاع ۲ و از سر دیگر آن کمانی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث است.



مثال: می‌خواهیم مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی دلخواه رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس به مرکز هر یک از دو سر این پاره‌خط کمانی به شعاع طول پاره‌خط رسم شده می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است.



فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱ــ نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲ــ نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳ــ نقطهٔ A، مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.

۴ــ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازهٔ شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱ــ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۲ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳ــ جاهای خالی را به‌گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر :

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

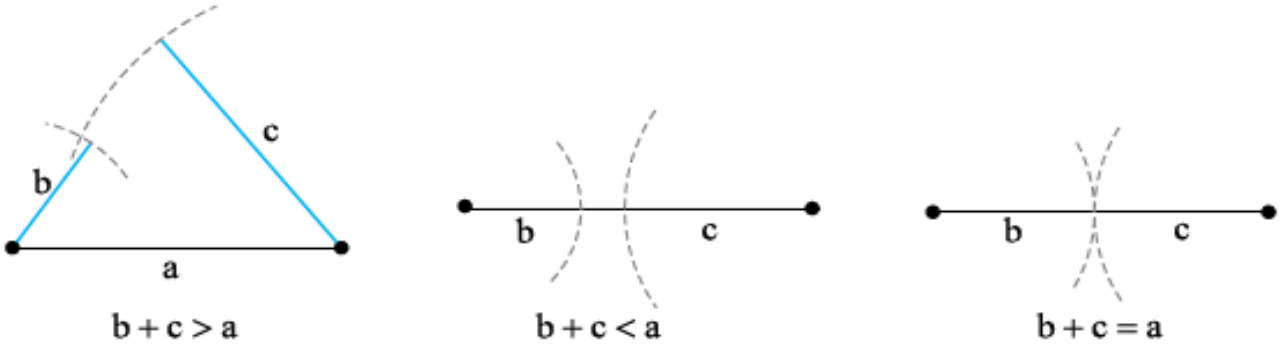
نقاط A و B به فاصلهٔ ..... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر ..... و از نقطهٔ B برابر ..... باشد.

نتیجه فرض کنید a ، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این‌که مثلثی به طول ضلع‌های a ، b و c وجود داشته باشد، باید

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

زیرا

پاره‌خطی به طول a در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً b باز کنید و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌اید، کمانی بزنید. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً c باز کنید و به مرکز سر دیگر پاره‌خط، کمانی بزنید. در این‌صورت، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای خارج پاره‌خط اولیه قطع کنند باید $b+c>a$.



توجه کنید که اگر ابتدا پاره‌خطی به طول b در نظر بگیریم و بعد کمان‌هایی به شعاع a و c بزنیم، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول b قطع کنند، باید $a+c>b$.
همین‌طور، اگر ابتدا پاره‌خطی به طول c در نظر بگیریم و سپس کمان‌هایی به شعاع a و b بزنیم، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول c قطع کنند، باید $a+b>c$.

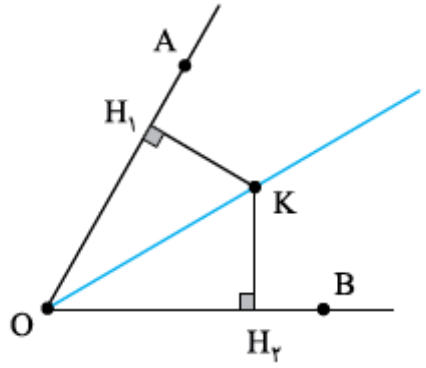
خاصیت اصلی نیمساز و ترسیم نیمساز

مسئله 1:

نشان دهید هر نقطه ای که رو نیمساز یک زاویه باشد فاصله اش از دو سر نیمساز یکسان است و برعکس.

حل:

زاویه‌ی AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی نیمساز آن باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر OA و OB رسم کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O یک ضلع مشترک دارند (KO) و دو زاویه‌ی حاده‌ی برابر هم دارند، زیرا OK نیمساز است، پس $H_1\hat{O}K=H_2\hat{O}K$. بنابراین مثلث‌های KH_1O و KH_2O به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت‌اند و در نتیجه $KH_1=KH_2$. یعنی فاصله‌ی K تا ضلع‌های زاویه‌ی AOB برابر است.



اکنون فرض کنید K نقطه‌ای درون زاویه‌ی AOB باشد و فاصله‌ی K از دو ضلع این زاویه برابر باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر ضلع‌های OA و OB رسم کنید. در این صورت $KH_1=KH_2$. نقطه‌ی O را به نقطه‌ی K وصل کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O وتر مشترک و دو ضلع برابر دارند. در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. به این ترتیب $H_1\hat{O}K=H_2\hat{O}K$، یعنی K روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

نتیجه هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۲ــ دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

ــ طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زوایه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ xOy چه نوع پاره‌خطی است؟

کار در کلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

خاصیت اصلی عمودمنصف و ترسیم عمودمنصف

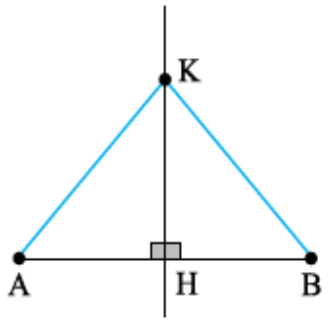
مسئله 2:

نشان دهید اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

حل:

پاره‌خط AB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی عمودمنصف آن باشد. از K به A و B وصل کنید (شکل را ببینید). در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHK و BHK یک ضلع مشترک دارند (KH)، یک زاویه‌ی (قائمه‌ی) برابر دارند $(A\hat{H}K=B\hat{H}K)$ و دو ضلع برابر نیز دارند $(AH=BH)$.

بنابراین مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ض‌زض) و در نتیجه KA=KB. یعنی فاصله‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر است.



اکنون فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر باشد. فرض کنید H وسط پاره‌خط AB باشد و از K به A ، B و H وصل کنید. در این صورت مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض). بنابراین زاویه‌های AHK و BHK برابرند و چون این دو زاویه مکمل‌اند، پس $A\hat{H}K=B\hat{H}K=90^\circ$، یعنی K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد. روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت

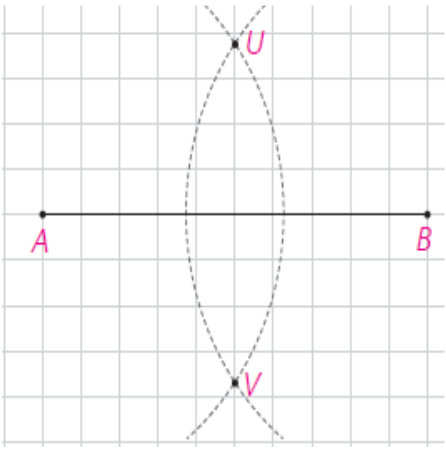
۱ــ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

۲ــ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ موردنظر بگذرد؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۳ــ به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

فعالیت



پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲ــ طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ــ طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴ــ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟

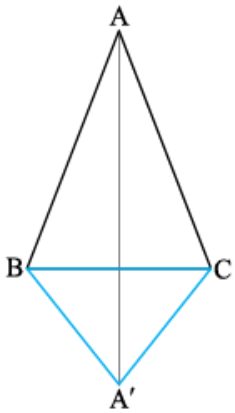
۵ـ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

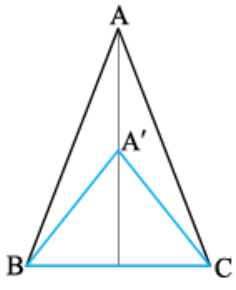
کاردرکلاس

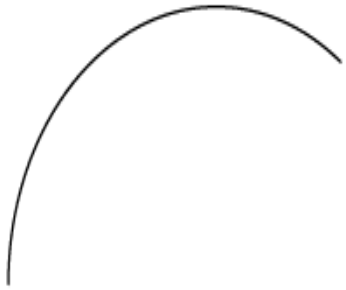
مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

مسئله ۳ دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. ثابت کنید خطی که از دو رأس این مثلث‌ها می‌گذرد، بر قاعده‌ی مشترک آن‌ها عمود است.

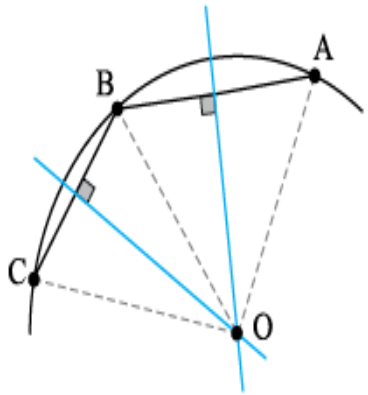
راه‌حل: فرض کنیم دو مثلث ABC و A′BC متساوی‌الساقین باشند و BC قاعده‌ی مشترک هر دوی آن‌ها باشد. چون AB=AC پس A روی عمودمنصف BC قرار دارد و چون A′B=A′C در نتیجه A′ روی عمودمنصف BC قرار دارد. بنابراین AA′ عمودمنصف ضلع BC است. پس خط AA′ بر BC عمود است.







مسئله ۴ در شکل روبه‌رو قسمتی از یک دایره را می‌بینید. چگونه می‌توان این دایره را کامل کرد؟



راه‌حل: سه نقطه‌ی A ، B و C را روی قسمت داده شده در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند.
نقطه‌ی O از سه نقطه‌ی A ، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ی مورد نظر است.
اکنون اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره، دایره‌ی مورد نظر است.

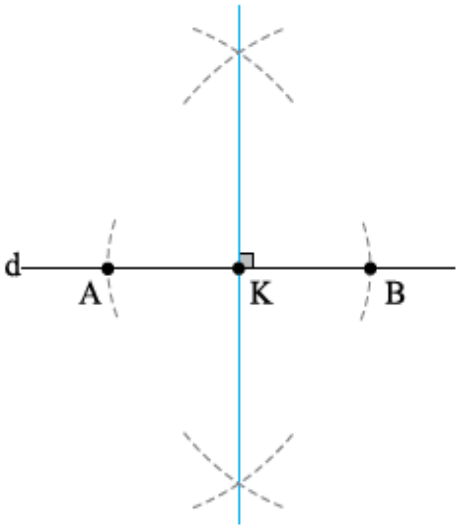
مسئله 5:

نحوه رسم خط عمود بر یک خط را توضیح دهید.

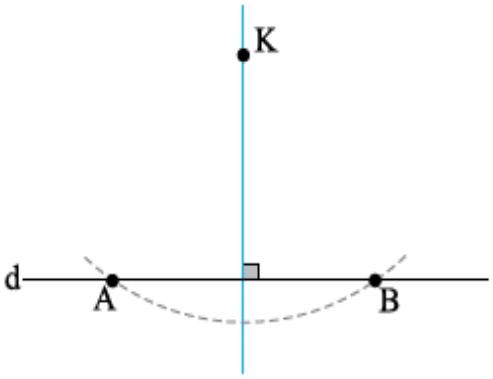
خط d مفروض است. می‌خواهیم از نقطه‌ی K در صفحه، خطی عمود بر خط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه‌ی K روی خط d است

به مرکز نقطه‌ی K و شعاعی دلخواه کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند (شکل را ببینید). در این صورت K وسط پاره‌خط AB است. اکنون اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، حتماً از K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



ب) نقطه‌ی K خارج خط d است

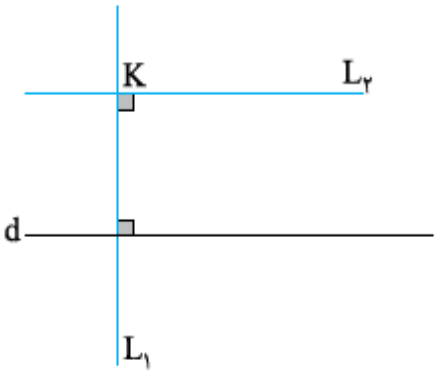


به مرکز نقطه‌ی K کمانی بزنید که خط d را در نقطه‌هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، از نقطه‌ی K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

توجه: دقت کنید که در روش‌های بالا مهم نیست نقطه‌ی K روی خط باشد یا خیر، روش یکی است.

مسئله 6:

مراحل رسم خطی موازی با یک از یک نقطه غیر واقع بر آن را توضیح دهید.



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه‌ای خارج آن است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا L_1 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر L_1 عمود باشد. در این صورت خط‌های d و L_2 بر خط L_1 عمودند، پس موازی‌اند.

فعالیت

پاره‌خط داده شدهٔ AB در شکل مقابل را با اندازهٔ ۴ واحد درنظر بگیرید.

الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟

کار در کلاس

طریقهٔ رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید.

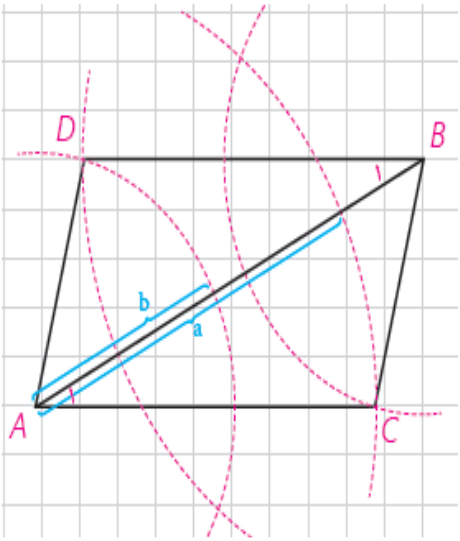
تمرین

۱ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است.
متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است.
مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۳ــ پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک بار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. (به‌طوری که مجموع a و b از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟

(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند.)



۴ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

۵ــ می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۶ ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

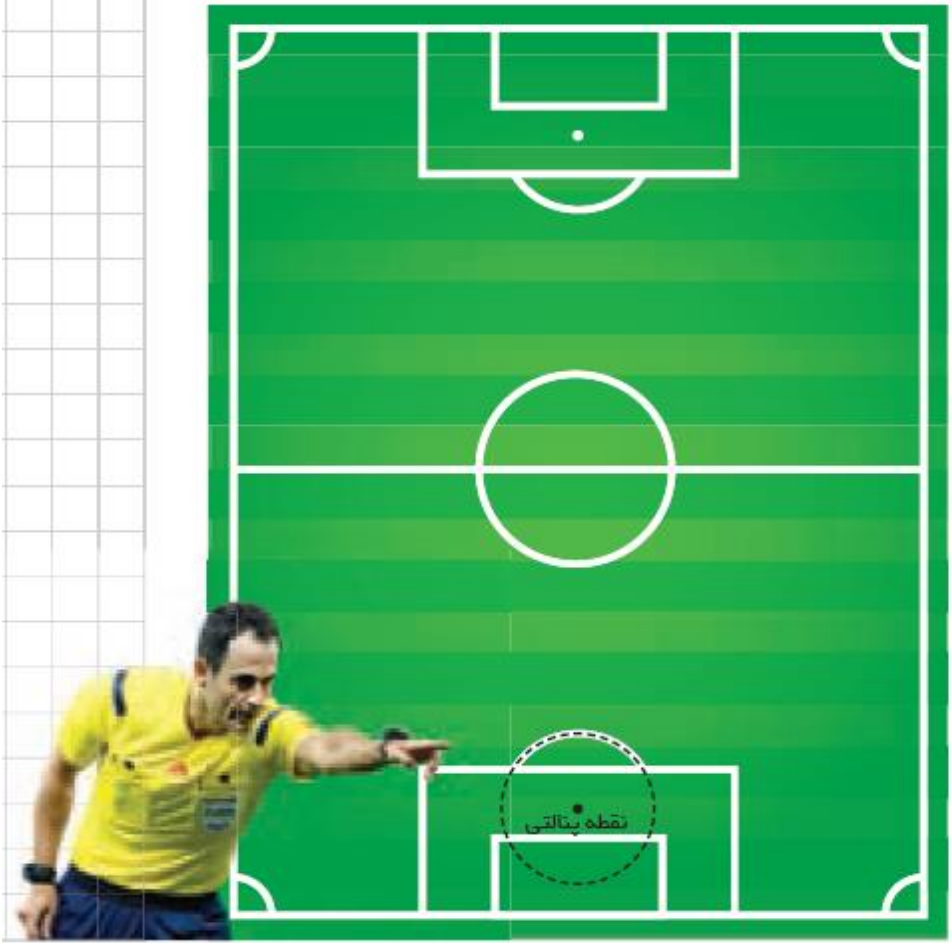
ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویهٔ موردنظر را رسم کنید.

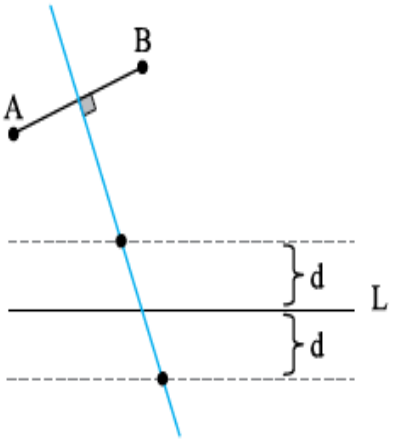
۷ــ وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.



مسئله ۶ d عددی مثبت است. A و B دو نقطه در صفحه‌اند و L خطی راست است. همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر هم و فاصله‌ی آن‌ها از L برابر با d باشد.



راه‌حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف AB هستند و نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از L برابر d است، دو خط راست موازی با L و به فاصله‌ی d از L هستند. پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد عمودمنصف AB و این دو خط موازی با L هستند.

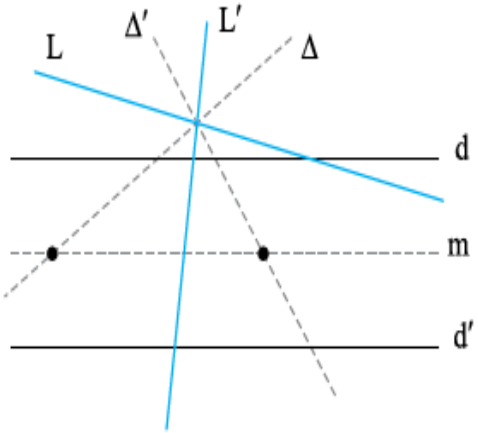
بحث در تعداد جواب:

حالت (۱): اگر عمودمنصف AB با دو خط متقاطع باشد، دو جواب داریم.

حالت (۲): اگر عمودمنصف AB موازی با این دو خط باشد، جواب نداریم.

حالت (۳): اگر عمودمنصف AB بر یکی از این دو خط منطبق شود، تعداد نامتناهی جواب داریم.

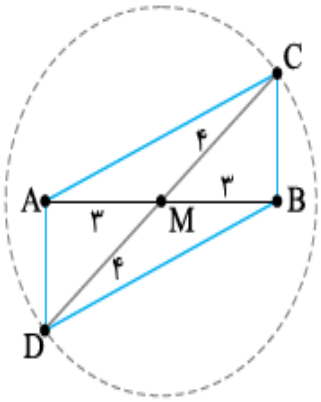
مسئله ۷ همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.



راه‌حل: دو خط موازی را d و d′ و دو خط متقاطع را L و L′ می‌نامیم. نقطه‌هایی که از دو خط d و d′ به یک فاصله هستند، روی خط راستی موازی این دو خط هستند که به فاصله‌ی نصف فاصله‌ی دو خط d و d′، در میان آن‌ها قرار دارد (خط m در شکل روبه‌رو). از طرف دیگر نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع L و L′ برابر است، روی نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که با این خط‌ها تشکیل می‌شوند (دو خط Δ و Δ′ در شکل روبه‌رو). پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد خط‌های Δ و Δ′ با خط m هستند.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مسئله ۸ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. در تعداد جواب‌ها بحث کنید.

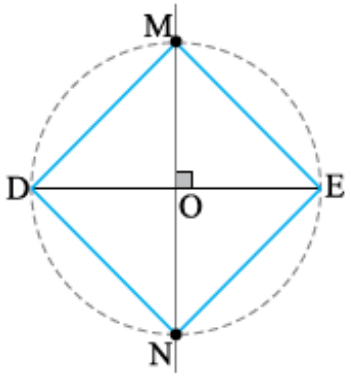


راه‌حل: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. اکنون مطابق شکل پاره‌خط AB را به طول ۶ رسم می‌کنیم. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. به مرکز M و شعاع $\frac{۸}{۲}=۴$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اکنون، یکی از قطرهای دلخواه از این دایره را رسم می‌کنیم (مانند قطر CD در شکل، فقط دقت کنید که قطر مورد نظر از A و B عبور نکند). چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

واضح است که نامتناهی متوازی‌الاضلاع با این ویژگی‌ها می‌توان رسم کرد.

مسئله 9:

مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد؟

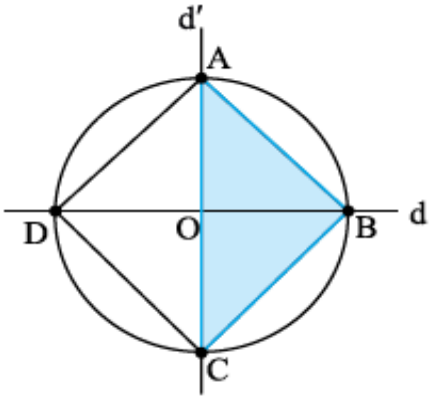


راه‌حل: می‌دانیم در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمودمنصف پاره‌خط معلوم DE را رسم می‌کنیم.

سپس به مرکز نقطه‌ی O، وسط پاره‌خط DE و شعاع OE دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف DE را M و N می‌نامیم. چهارضلعی MEND مربع موردنظر است.

مسئله 10:

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به اندازه‌ی وتر $۴\sqrt{۲}$ رسم کنید.



راه‌حل: می‌دانیم در مربع، دو قطر مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس دو خط عمود بر هم d و d′ را رسم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع $۲\sqrt{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط d و d′ را در نقطه‌های A ، B ، C و D قطع کند. در این‌صورت ABCD مربع به قطر $۴\sqrt{۲}$ است. به این‌ترتیب مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مثلث مورد نظر است.

درس دوم

استدلال:

استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد.

انواع استدلال ها در ریاضیات

1–**شهودی** 2– **تمثیلی** 3– **استقرائی** 4– **استنتاجی**

استدلال شهودی :

استدلال شهودی مبتنی بردرک شهودی است وبه نوعی درک بدون استدلال است وبه وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی :

تایید صحت یک اصل ، موضوع یایک خبری بااستفاده ازمثال به عبارت دیگر یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون وارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج.

به طورکلی و با بیان ساده (می توانیم بگوییم) منظورازاستدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم بااستفاده ازمثال ومشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی :

روش نتیجه گیری کلی برمبنای مجموعه ی محدودی ازمشاهدات است ودراستدلال استقرایی ازجزء به کل می رسیم

.به عبارت دیگردراستدلال استقرائی ، بااستفاده ازانجام آزمایش ومشاهده ی تعدادمحدودی ازمشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم

نکات :

هراستدلالی که برپایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه ازاستدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبارآزمایش می نمودندوپس ازبررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند

استدلال استقرائی درصورتی عمومیت دارد وقابل استناداست که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود

دراستدلال استقرائی ازیک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی میگیریم ودرواقع ازجزء به کل می رسیم

استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری بااستفاده ازحقایقی است که درستی آن هاراقبلا پذیرفته ایم .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

نمونه های از انواع استدلال و توجیه و تحلیل هر کدام

نمونه	استدلال	توجیه یاتحلیل
بیان این نکته که " کوه تاه ترین فاصله بین دونقطه به صورت خط " مستقیم است	شهودی	بااستفاده ازدرک شهودی می توان مشاهده کردخط مستقیم کوتاهترین فاصله است
بدست آوردن فاصله ی سیارات ازخورشیدتوسط گالیله	استقرائی	مبنای اولیه کارآنها آزمایش وحدس وبازهم آزمایش بوده است
خارج قسمت اعدادچهاررقمی abab بر ۱۰۱ برابراست با ab	استنتاجی	بااستنادبه دانسته هایمان درموردارزش مکانی .قانون تقسیم وفاکتورگیری و... این نتیجه محقق می شود
تشخیص اوقات شرعی بااستفاده ازسایه اشیاء ورویت ستارگان	شهودی	درک به وسیله ی حواس درآنچه که درپیرامون ما می گذشته است
برگ درختان سبزدرنظرهوشیار هرورقش دفتریست معرفت کردگار	شهودی	برپایه شهوداست – نظرکردن به نشانه های هستی حدس وآزمایش نیازنیست – پیش نیازنمی خواهد.. بدون استدلال است

بهترین ومحکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است

اثبات : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوییم.

فرض مسئله : اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله : خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

هندسه پایه دهم **تدوین و گردآوری: ولی زاده**

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

مثال : در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید :

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. فرض : خواص لوزی حکم : برابر بودن زاویه های رو به رو

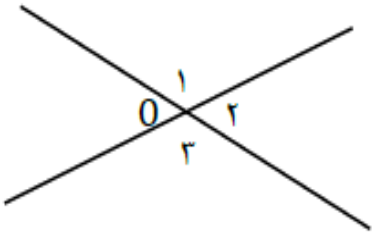
ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. فرض : دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع حکم : برابر بودن دو مماس

مثال : با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید :

الف) { در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگر ند ، لوزی نوعی مربع است } $\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگر ند

ب) { هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است ، مربع دارای زاویه قائمه است } $\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

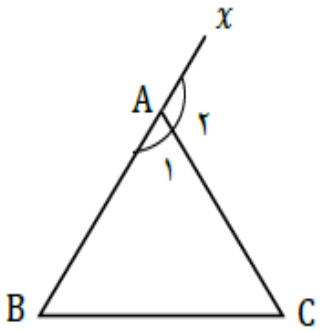
مثال : ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.



فرض : $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ دو زاویه متقابل به راس حکم : $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

مثال : ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.



فرض : $\hat{A}_2$ زاویه ی خارجی مثلث حکم : $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

هم نهشتی مثلث ها : دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند :

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته : سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه : دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند :

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث :

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

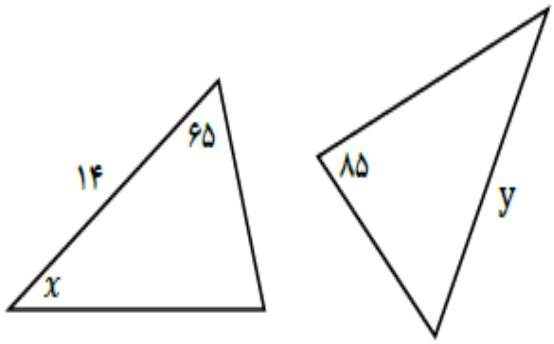
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته : در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال : دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

(مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است) $۱۸۰ - (۸۵ + ۶۵) = ۳۰$

$x = ۳۰ \quad , \quad y = ۱۴$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

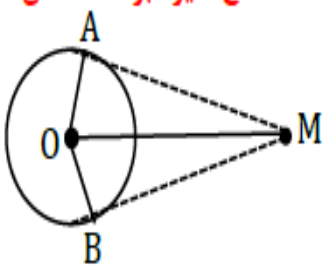
قدم های حل مسئله : برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است :

۱) درک و فهم مسئله ۲) رسم شکل ۳) نوشتن فرض و حکم مسئله ۴) راهبرد حل مسئله

مثال : نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول : (درک و فهم مسئله) شعاع دایره برخط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

گام دوم : (رسم شکل)



گام سوم : (نوشتن فرض و حکم)

فرض : $OA = OB , \hat{A} = \hat{B} = ۹۰$

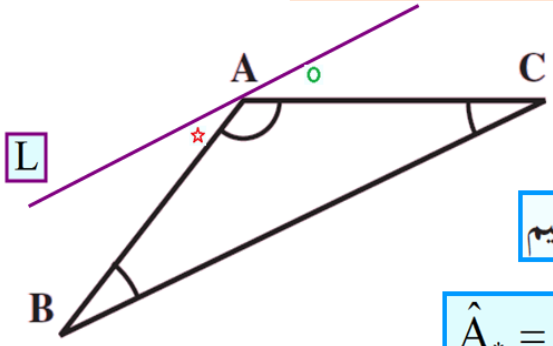
حکم : $MA = MB$

گام چهارم : (راهبرد حل مسئله)

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \text{ شعاع دایره} \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰ \text{ درجه} \\ OM = OM = \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و ض})}{\overset{\triangle}{MAO} \cong \overset{\triangle}{MBO}} \Rightarrow \underset{(\text{اجزای متناظر})}{MA = MB}$$

قضیه: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی، ۱۸۰° است.



از A خطی به موازات BC رسم می کنیم

$BC \parallel L$ و خط AB مورب: $\hat{A}_* = \hat{B}$

$L \parallel BC$ و خط AC مورب: $\hat{A}_o = \hat{C}$

ولی می دانیم که: $\hat{A}_* + \hat{A}_o + \hat{A} = ۱۸۰^o$

پس داریم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^o$

مسئله 1:

ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرس اند.

مسئله 2:

نشان دهید سه ارتفاع هر مثلث همرس اند

مسئله 3:

نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس اند.

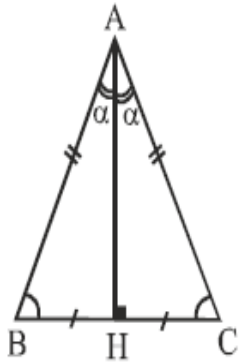
قضیه 1:

نشان دهید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه رو به رو به ضلع کوچکتر است.

مثلث متساوی‌الساقین: مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین نامیده می‌شود، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می‌نامیم.

1 در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.

2 عکس قضیه‌ی (1) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه‌ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه‌های مساوی آن با هم برابرند).



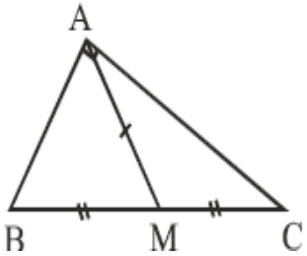
3 در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.

4 در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ روابط زیر برقرار است،

$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ زوایای مجاور به ساق

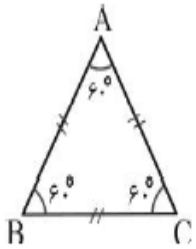
$\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C}$ زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده

5 با رسم میانه‌ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود.



$\begin{cases} \hat{A} = 90 \\ BM = CM \end{cases} \Rightarrow$ متساوی‌الساقین هستند $\overset{\Delta}{MAC}$ و $\overset{\Delta}{MAB}$

مثلث متساوی‌الاضلاع



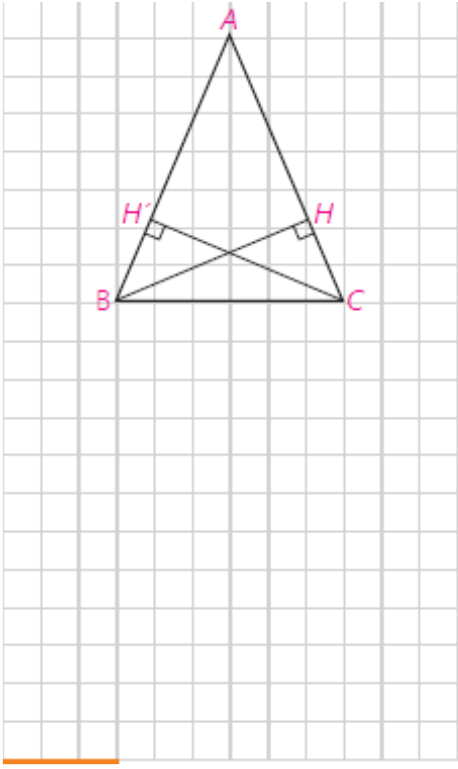
مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه‌ی آن‌ها 60 درجه است.

همچنین اگر هر سه زاویه‌ی مثلثی با هم برابر بودند، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی‌الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



مثال :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

تعاریف:

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

توجه:

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

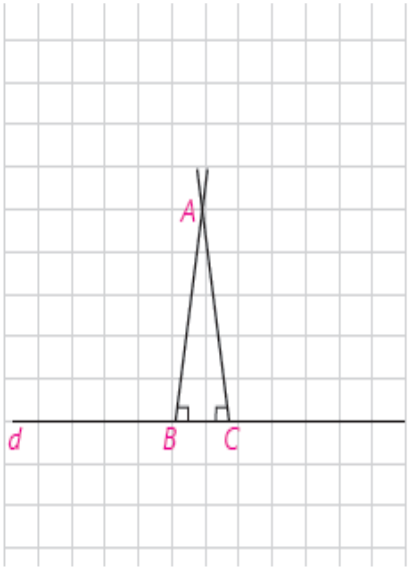
نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش 360° است.»

برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال : از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

عکس قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

اثبات:

قضیه دوشرطی:

به عبارت $P \Rightarrow q$ یک قضیه شرطی می گویند. P را فرض قضیه و q را حکم آن می نامند. در صورتی که

عکس یک قضیه شرطی نیز درست باشد آن قضیه را قضیه دو شرطی می نامند.

مثال: الف) قضیه فیثاغورس یک قضیه دو شرطی است.
ب) قضیه تالس در صفحه یک قضیه دو شرطی است.
ج) قضیه تالس در فضا یک قضیه شرطی است و عکس آن درست نیست.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛

مثال نقض:

مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است.

مثال: اگر a و b دوعدد اول باشند آنگاه جمع آنها هیچگاه اول نیست. جواب: نادرست. مثال نقض: $\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=5$

مثال:

مثال های زیر نمونه های از حکم های کلی هستند ، برای رد این احکام مثال نقض بیاورید.

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» **(حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)**

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» **(حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)**

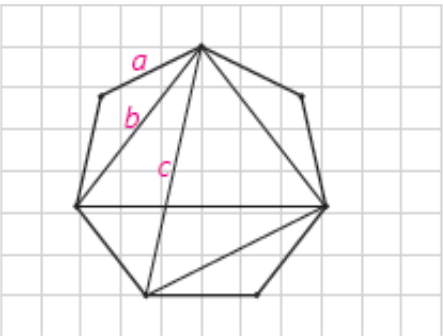
پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است.» **(حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)**

ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.» **(حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)**

توجه:

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کار در کلاس



۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».

۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

تمرین

۱ــ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲ــ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳ــ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴ــ با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰$.

۵ــ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

۶ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

هندسه پایه دهم **تدوین و گردآوری: ولی زاده**

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

سوالات امتحانی فصل اول:

۱	عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید. سپس اگر عکس آنها درست باشد آن را به صورت قضیه دو شرطی بنویسید و اگر عکس آن درست نباشد یک مثال نقض بیاورید. الف)هر دو مثلث همنهشت دارای مساحت های برابرند. ب) مثلثی که دو زاویه برابر دارد ،دارای دو ضلع برابر است. ج)اگر سه ضلع مثلث برابر باشند ، هر زاویه آن 60° است . د) هر کس در خواف زندگی می کند در استان خراسان است
۲	ثابت کنید: مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر ارتفاع مثلث است .
۳	قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند ، آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر ، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.
٤	قضیه(نامساوی مثلث) : در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.
٥	سه ضلع مثلثی ۸و۱۲و۱۵ سانتی متر ند. اندازه پاره خط هایی که نیمساز زاویه بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.
٦	قضیه: عمود منصف های ضلع های هر مثلث همرسند.
۷	از مثلث $AB^{\Delta}C$ ،اندازه ضلعهای AB=c و AC=b و طول ارتفاع $AH= h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید .
۸	مکان هندسی مرکز دایره ای که روی یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد را تعیین کنید.
۹	هریک از مفاهیم زیر را تعریف کنید . الف) مکان هندسی ب) عکس قضیه شرطی ج) زاویه محاطی د) چند ضلعی محیطی
۱۰	قضیه: در هر دایره ، قطر عمود بر هر وتر ،آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف میکند.
۱۱	دایره ی محاطی مثلث را تعریف کرده، اگر r شعاع دایره ی محاطی و p نصف محیط مثلث و s مساحت مثلث باشد.ثابت کنید $s = pr$
۱۲	قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برای نصف کمان مقابل آن است
۱۳	کمان در خور زاویه 30° روبروی پاره خط AB=۴cm را رسم کنید. و مراحل رسم را توضیح دهید.
	موفق باشید. ولی زاده

ولی زاده

هندسه پایه دهم **تدوین و گردآوری: ولی زاده**

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

برای غلط بودن عبارات مثال نقض بزنید .

الف) هر چهار ضلعی که قطر هایش منصف باشند، مستطیل هست.

ب) نقطه همرسی عمود منصفها ی سه ضلع مثلث همواره داخل مثلث است .

صحیح وغلط بودن عبارات را تعیین کنید .

الف) جمله ((درس بخوان؟)) یک گزاره نیست .

ب) مثلثی با اضلاع ۴و۸و۲۰ قابل رسم است.

ج) از دو نقطه فقط یک خط میتوان رسم کرد.

د) استدلال استنتاجی بر اساس واقعیتی که درستی آنراپذیرفته ایم است.

ه) مجموع زاویه های داخلی هرچهار ضلعی محدب ۱۸۰ درجه است.

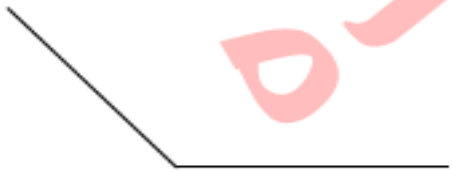
متوازی الاضلاعی با قطرهای ۴و۳ رسم کنید .چند متوازی الاضلاع میتوان رسم کرد ؟چرا؟

یک لوزی به طول ضلع ۳وقطر۴ سانتی متررسم کنید .

با استفاده از خط کش و پرگار خطی موازی خط دلخواه L از یک نقطه خارج خط رسم کنید.

الف)بااستفاده ازپرگار نیمساززاویه ی زیررارسم را کنید.

ب) نقاط روی نیمساز چه خاصیتی دارد ؟



به روش غیر مستقیم ثابت کنید :

اگردر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویه بزرگتر بزرگتر است ازضلع مقابل به زاویه کوچکتر .

ثابت کنید سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث همرسند .

الف) قضیه ((در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آن گاه سه زاویه نیز با هم برابرند))

را بصورت دو شرطی بنویسید.

ب) نقیض گزاره ی ((هیچ عدد صحیحی بین ۳ و ۴ وجود ندارد.)) را بنویسید.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

هندسه پایه دهم

تدوین و گردآوری: ولی زاده

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱-اگر نقطه ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد،آن نقطه روی ------ قرار دارد.

۲-یک جمله خبری که دقیقا درست یا نادرست باشد ، ---------- نام دارد .

۳-اگر نقطه ای از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد ، آن نقطه روی ---------- پاره خط قرار دارد .

۴-اگر در یک قضیه ، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می شود ---------- گفته می شود .

گزینه درست را انتخاب کنید.

۱-نقیض گزاره ی " هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد " کدام است ؟

الف) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه دارد ○ ب) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد ○

ج) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه ندارد ○ د) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه دارد ○

۲-کدام جمله ی زیر گزاره است ؟

الف) کتابت را مطالعه کن ○ ب) چه هوای خوبی ! ○

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰درجه است . ○ د) آیا فردا هوا بارانی است؟ ○

۳-برای کدام حکم کلی زیر مثال نقض وجود دارد ؟

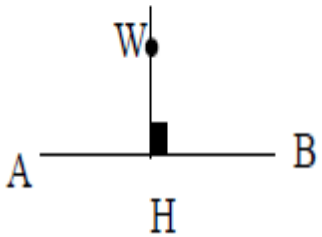
الف) مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰درجه است ○ ب) هر دو مثلث هم نهشت هم مساحت هستند. ○

ج) به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار n^2+n+41 عددی اول است . ○ د) عمودمنصف های هر مثلث هم راس اند. ○

عکس قضیه ی زیر را بنویسید.

" در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند ، دو زاویه روبرو به آنها نیز برابرند ."

در شکل مقابل نشان دهید نقطه ی W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است .



ولی زاده

هندسه پایه دهم

تدوین و گردآوری: ولی زاده

کانال تلگرام: *@mathvalizadeh*

تعریف کنید. الف) استدلال استقرایی: ب) مثال نقض: ج) قضیه:
یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ سانتی متر باشند و مراحل کار را رسم کنید.
ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.
به کمک استدلال استنتاجی نشان دهید هر سه نیمساز زاویه های داخلی مثلث همرس اند.
قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند. زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.
عکس قضیه های زیر را بنویسید. اگر عکس آن نیز درست بود، آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید. الف)اگر دو مثلث هم نهشت باشند آنگاه دارای مساحت های برابر هستند. ب)اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه اظلاع متناظر شان متناسب هستند.
با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $B \neq C$.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مفاهیم زیر را تعریف نمایید:

الف) استدلال استنتاجی:

ب)گزاره :

ج)مثال نقض :

د)قضیه اساسی تشابه :

رسم خطی موازی یک خط داده شده از یک نقطه ی خارج آن را با رسم شکل و کلیه مراحل توضیح دهید.

متوازی الاضلاعی رسم نمایید که طول ضلع هایش ۵ و ۶ و طول قطر آن ۸ باشد.(مراحل رسم را توضیح دهید)

ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث هم راسند.(شکل رسم نمایید)

الف)قضیه نامساوی ها در مثلث را بیان نمایید.

ب) قضیه فوق را اثبات نمایید.(رسم شکل فراموش نشود)

اندازه اضلاع سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ می باشد. اندازه پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه بزرگتر مثلث مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد تعیین کنید.

قضیه زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس فرض و حکم آن را تعیین کنید.

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

سوالات تستی

ردیف	سوالات
1	در کدام‌یک از اشکال زیر، همواره نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه‌ی تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، برهم منطبق است؟ ۱) مستطیل ۲) لوزی ۳) مثلث ۴) شش‌ضلعی منتظم
2	-نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی ۷۰ درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{۳}{۴}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ ۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۶۰° ۴) ۸۰°
3	-نقطه‌ی M درون مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. ۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC ۲) نیم‌ساز رأس A ۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C ۴) نیم‌ساز رأس B
4	-عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به‌وجود می‌آید برابر است با ... ۱)قطری عمود بر AB ۲) وتری موازی و هم‌اندازه با AB ۳) خود وتر AB ۴) قطری موازی با وتر AB

5 -مثلث ABC با داشتن مقادیر $b=۱۰$ ، $c=۱۷$ و $h_a=۸$ رسم شده است. مساحت این مثلث کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶

۳) ۶۰ ۴) ۴۸

6 -نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی ۷۰ درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{۳}{۴}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۰°

۳) ۶۰° ۴) ۸۰°

7 -نقطه‌ی M درون مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد.

۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC ۲) نیم‌ساز رأس A

۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C ۴) نیم‌ساز رأس B

8 -عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به‌وجود می‌آید برابر است با ...

۱)قطری عمود بر AB ۲) وتری موازی و هم‌اندازه با AB

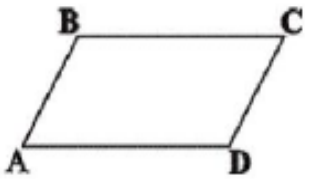
۳) خود وتر AB ۴) قطری موازی با وتر AB

9 -نقاط A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم هستند. دو نقطه‌ی متمایز U و V فاصله‌شان از A برابر ۳ سانتی‌متر و از B برابر x سانتی‌متر است. x در کدام محدوده است؟

۱) $1 < x$ ۲) $x < 1$

۳) $1 < x < 7$ ۴) $1 < x < 11$

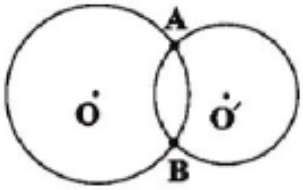
10 -از تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع زیر، لزوماً کدام شکل ایجاد می‌شود؟



۱) مستطیل ۲) مربع

۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

11 -مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O′ در نقاط A و B متقاطع می‌باشند. در این صورت لزوماً:



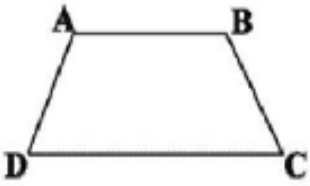
۱) OO' از وسط AB می‌گذرد.

۲) OO' بر AB عمود است.

۳) $O\hat{A}O' = O\hat{B}O'$

۴) هر سه گزینه صحیح است.

12 -در یک ذوزنقه، نقطه‌ای از دو سر قاعده‌ی CD به یک فاصله و هم‌چنین از قاعده‌ی CD و ساق AD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟



۱) نیم‌سازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ ۲) عمودمنصف‌های دو ساق

۳) عمودمنصف CD و نیم‌ساز زاویه‌ی D ۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده‌ها

13

-در مثلث ABC، دو رأس A و B ثابت هستند. با داشتن طول ارتفاع وارد بر AB، رأس C همواره روی کدام گزینه قرار دارد؟

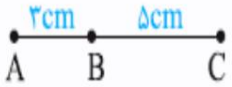
۱) نیم‌دایره‌ای به قطر AB
۲) دایره‌ای به قطر AB
۳) یک خط موازی AB
۴) دو خط موازی AB

فصل

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

نسبت: اگر a و b از یک جنس باشند (یعنی واحد اندازه‌گیری آن‌ها یکی باشد) آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم.



واضح است که در نسبت $\frac{a}{b}$ همواره $b \neq 0$ می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل نسبت $\frac{AB}{BC}$ برابر $\frac{3}{5} = 0/6$ است.

تناسب: تساوی میان دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b \cdot d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به c و b وسطین گفته می‌شود، زیرا:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \div \overbrace{b = c}^{\text{وسطین}} \div d}_{\text{طرفین}}$$

ویژگی‌های تناسب

به کمک روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت:

۱ در هر تناسب، حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین برابر است:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc}$$

۴) اگر با تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ هر کاری کنیم که تساوی حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین یعنی $ad=bc$ به هم نریزد آن کار مجاز است. این کارهای مجاز عبارتند از:

● طرفین تناسب را می‌توان معکوس کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

● جای طرفین را با هم و جای وسطین را با هم می‌توان عوض کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

● ترکیب و تفضیل در صورت یا مخرج تناسب امکان‌پذیر است:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$

● در هر تناسب می‌توان صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع و تفریق کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$$

دقت کنید ویژگی فوق را می‌توان تعمیم داد:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=k\Rightarrow\frac{a_1+a_2+\cdots}{b_1+b_2+\cdots}=k$$

نکته: به‌طور کلی اگر در یک تناسب، هر کاری که روی صورت‌ها انجام می‌دهیم، همان کار را در مخرج‌ها نیز انجام دهیم، نسبت حاصل با نسبت‌های قبلی برابر است:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ax\pm cy}{bx\pm dy}$$

واسطهٔ هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، مانند تناسب‌های $\frac{x}{c}=\frac{a}{x}$ یا $\frac{x}{a}=\frac{c}{x}$، با طرفین وسطین کردن تناسب به تساوی $x^2=ac$ می‌رسیم که در این صورت x را واسطهٔ هندسی a و c می‌گوییم.

مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۱۶ داشته باشیم، پاره‌خطی به طول ۸ واسطهٔ هندسی بین آن‌ها است، زیرا $8^2=4\times16$ می‌باشد.

۱۱- اگر $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x+2y+3z$ کدام است؟

۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۱۴/۶ ۴) ۱۶/۴

۲- اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲۴-a}{۱۸-b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۳- اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{a}{b}$ باشد، $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۴- از تناسب‌های $\frac{۱}{۴}=\frac{۲(c-۲b)}{۷}=\frac{۳b-c}{۶}=\frac{a+۲b}{۳}$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۳/۲۵

۵- نقطه‌های P و Q روی پاره‌خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{BP}{AP}$، $\frac{۳}{۴}=\frac{QB}{QA}$ و $PQ=۲$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

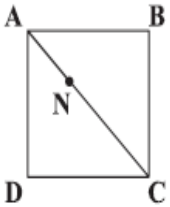
۶- در شکل مقابل $OA=۲$، $OB=۴$، $OC=۵$ و $OD=۷$ می‌باشد. نقطهٔ P بین B و C طوری قرار دارد که $\frac{BP}{PC}=\frac{AP}{PD}$، در این صورت طول OP کدام است؟

۱) ۴/۶ ۲) ۴/۲ ۳) ۴/۸ ۴) ۴/۵

۷- روی پاره‌خط $AB=۱۲$، دو نقطهٔ M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{BN}{AN}=\frac{AM}{MB}=۲$، در این صورت طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۸- در شکل مقابل، طول ضلع مربع ۶ و $\frac{۳}{۲}=\frac{NC}{AN}$ است. فاصلهٔ N از مرکز مربع کدام است؟

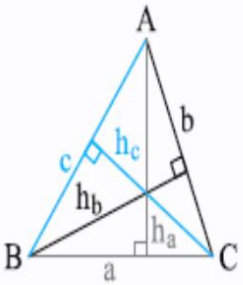


۱) $\frac{۶\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$

۹- اگر x واسطهٔ هندسی b و c باشد، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $\frac{x+c}{x+b}=\frac{c}{x}$ ۲) $\frac{x-c}{x-b}=\frac{c}{x}$ ۳) $\frac{x+c}{x+b}=\frac{c}{b}$ ۴) $\frac{x-c}{x-b}=\frac{c}{b}$

رابطهٔ اضلاع و ارتفاع‌ها در مثلث



می‌دانیم مساحت هر مثلث از رابطهٔ «ارتفاع × قاعده × $\frac{۱}{۲}$» به‌دست می‌آید، یعنی:

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}b.h_b=\frac{۱}{۲}c.h_c$$

با تبدیل هر یک از برابری‌های فوق به یک تناسب، می‌توان گفت «در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.» مثلاً:

$$\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}b.h_b \Rightarrow a.h_a=b.h_b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$$

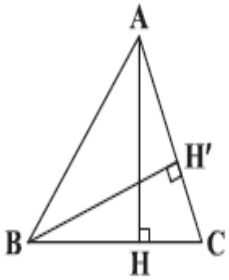
نتیجه: هر رابطهٔ هم‌درجه‌ای که بین اضلاع یک مثلث برقرار باشد (چه رابطهٔ مساوی، چه رابطهٔ نامساوی)، همان رابطه بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است. مثلاً در یک مثلث قائم‌الزاویه که رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ در آن برقرار است، رابطهٔ $\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{h_b^۲}+\frac{۱}{h_c^۲}$ نیز در آن برقرار می‌باشد.

سوال:

۱۰- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH′ را رسم کرده‌ایم. نسبت $\frac{AH}{BH'}$ با کدام نسبت برابر است؟

۱) $\frac{AC}{BC}$ ۲) $(\frac{AC}{BC})^۲$ ۳) $\frac{BC}{AC}$ ۴) $(\frac{BC}{AC})^۲$

۱۱- در مثلث ABC با طول اضلاع $a=۵$، $b=۶$ و $c=۹$، حاصل $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_c}{h_a}$ کدام است؟



۱) $\frac{۷۸}{۵۳}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷۹}$

۳) $\frac{۵۳}{۷۸}$ ۴) $\frac{۷۹}{۴۵}$

۱۲- در مثلث ABC، طول اضلاع $a=۴$، $b=۶$ و $c=۸$ می‌باشد. حاصل $\frac{h_a^۲}{h_b h_c}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۴

۱۳- در مثلث ABC، اگر $a<b<c$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $h_a<h_b<h_c$ ۲) $h_a>h_b>h_c$ ۳) $h_b>h_c>h_a$ ۴) $h_b>h_a>h_c$

۱۴- در مثلث ABC، اگر $a=۴$، $b=۶$ و $h_c=h_a+h_b$ باشد، اندازهٔ ضلع c کدام است؟

۱) ۳/۲ ۲) ۳/۶ ۳) ۲/۸ ۴) ۲/۴

۱۵- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

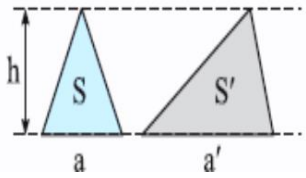
۱۶- در مثلث ABC، اگر $h_a \times h_b=۱۶$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}$ ۳) $۲\sqrt{ab}$ ۴) $۴\sqrt{ab}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مساحت مثلث‌های هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

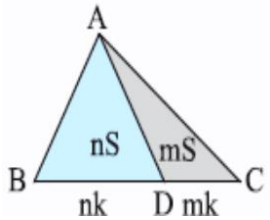
با توجه به این‌که مساحت مثلث از رابطهٔ «ارتفاع × قاعده × $\frac{۱}{۲}$» به‌دست می‌آید، اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند.



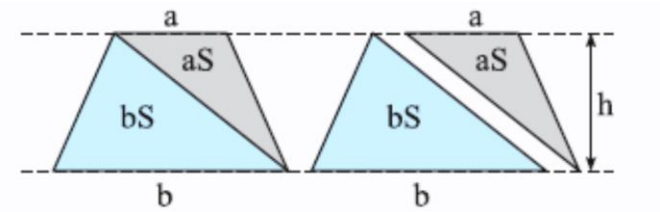
$$\frac{S}{S'}=\frac{a}{a'}$$

اثبات:

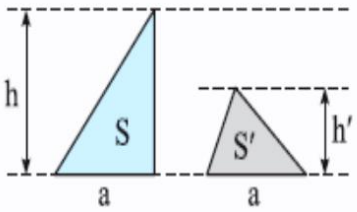
نتیجه: الف) اگر خطی از یک رأس مثلث طوری رسم شود که قاعده را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند، مساحت مثلث هم به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌شود.



ب) در ذوزنقه‌ها وقتی یک قطر رسم می‌شود، نسبت مساحت دو مثلث ایجاد شده برابر نسبت قاعده‌ها است.



۴ اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های وارد بر این قاعده‌ها است.

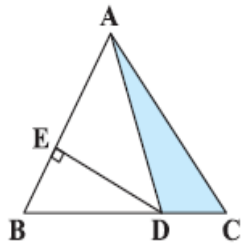


$$\frac{S}{S'}=\frac{h}{h'}$$

اثبات:

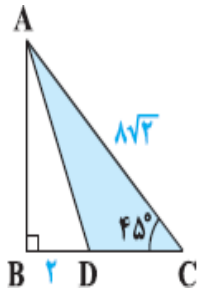
سوال:

۱۸- در شکل مقابل، $AB=۸$ ، $DE=۶$ و $۲BD=۳DC$ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



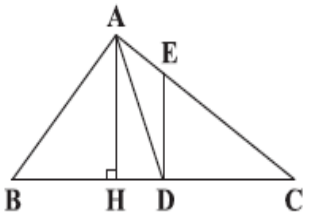
۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۲۰

۱۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۱۶
۴) ۳۲

۲۰- در شکل مقابل، $\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۳}$، $CD=۶$ و $AH=۸$ می‌باشد. مساحت مثلث ADE کدام است؟



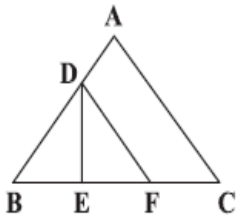
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۹

۲۱- در شکل مقابل، $۲AD=BD$ و مساحت مثلث ABC برابر ۳۶ است. اگر $BE=EF=FC$ باشد، مساحت مثلث DEF کدام است؟



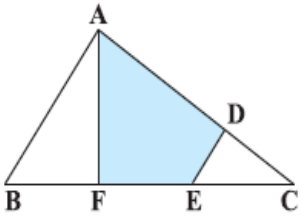
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۹

۲۲- در شکل مقابل، $AD=۲DC$ و $BF=FE=EC$ می‌باشد. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۰ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



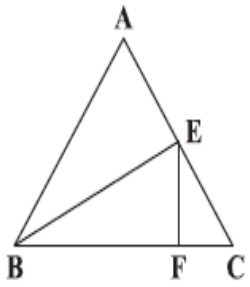
۱) ۶۰

۲) ۴۸

۳) ۴۰

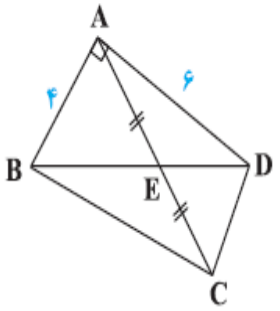
۴) ۳۶

۲۳- در شکل مقابل، E وسط ضلع AC و $BC = ۳CF$ می‌باشد. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۲ باشد، مساحت مثلث BEF کدام است؟



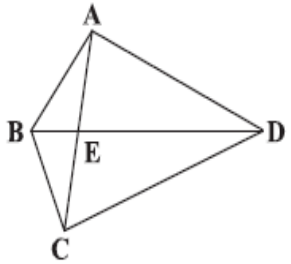
۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۱۶

۲۴- در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۲

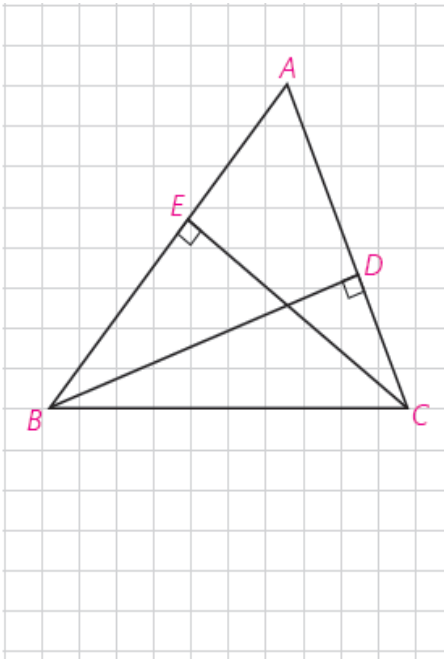
۲۵- در شکل مقابل، $ED = ۴BE$ می‌باشد. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت چهارضلعی است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۷}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

فعالیت ۱



مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظرگرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.

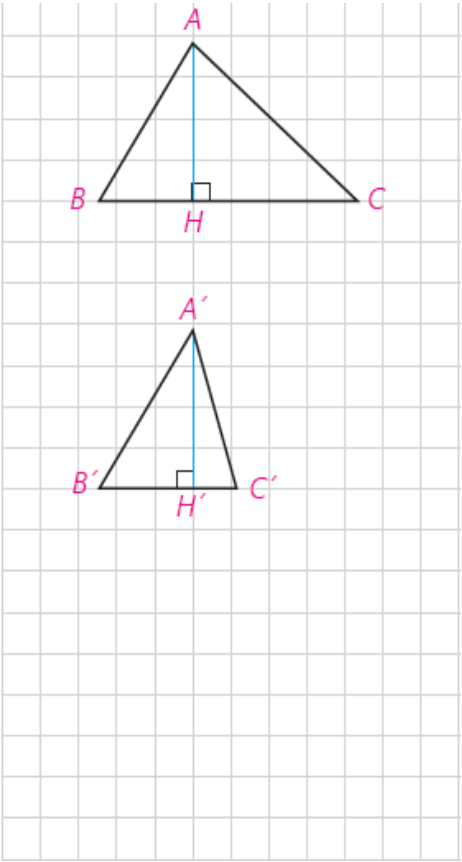
$$\text{مساحت } ABC = \frac{۱}{۲} AC \times \ldots$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots$$

ــ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین : $AC \times \ldots = \ldots \times \ldots$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

فعالیت ۲



در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A′H′ در دو مثلث ABC و A′B′C′ هم‌اندازه‌اند ($AH = A'H'$)

با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$S_{ABC} = \text{مساحت } ABC = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$$

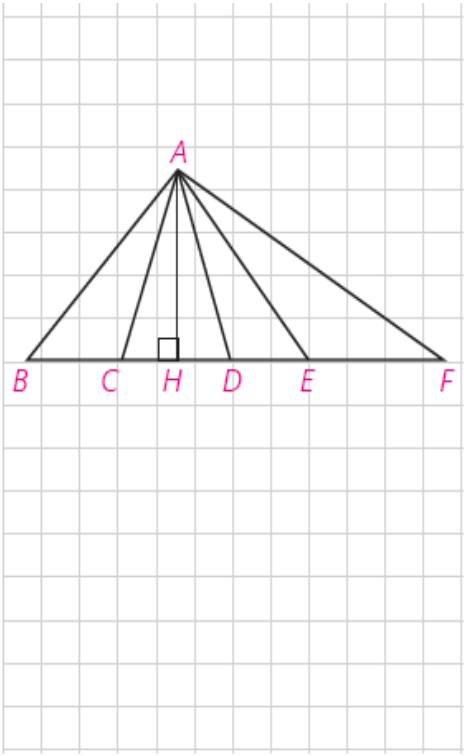
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots}{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

کار در کلاس

در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟



با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\cdots}{\cdots}$

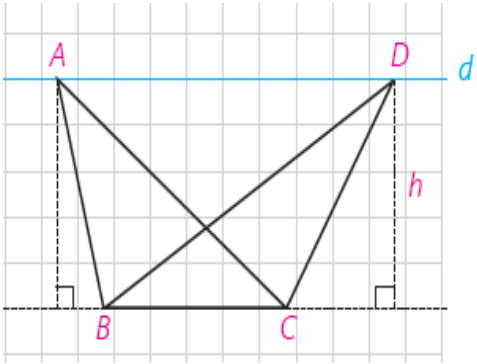
نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$

کار در کلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

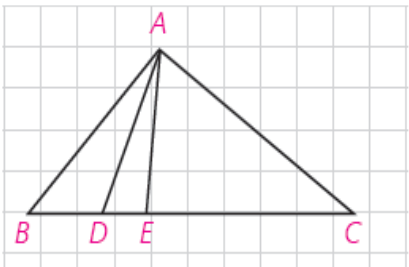
اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

تمرین

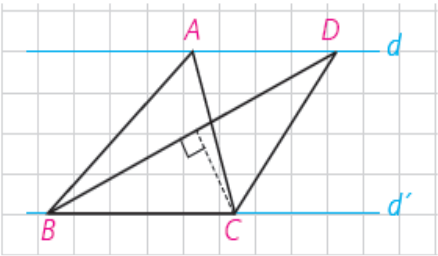
۱ــ اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{z}{۶}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ حاصل x+y+z را به‌دست آورید.

۲ــ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۳ــ طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



۴ــ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.

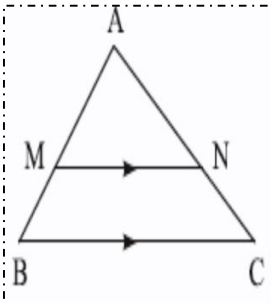


۵ــ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر BD=۶cm باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.

درس دوم

قضیهٔ تالس

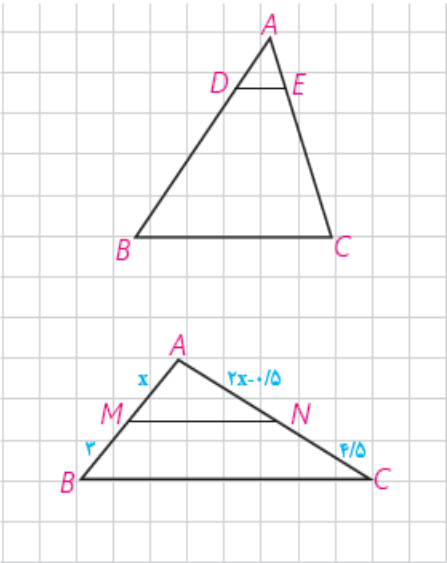
۱ـ **قضیهٔ تالس:** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

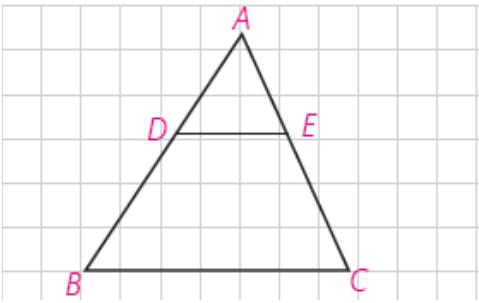
اثبات:

کار در کلاس



۱ــ در شکل مقابل DE||BC و AD=۱ و DB=۳ و AE=۰/۸. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.

۲ــ در شکل مقابل MN||BC؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.



۳ــ در شکل مقابل DE||BC؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

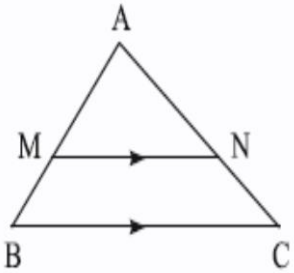
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

نکته: به کمک خواص تناسب می‌توان قضیهٔ تالس را به‌صورت‌های زیر نیز بیان کرد:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\boxed{\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}\Rightarrow\boxed{\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}}$$

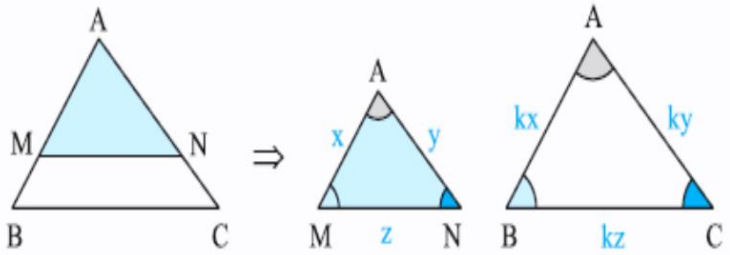
۲ـ تعمیم قضیهٔ تالس (تالس جزء به کل): اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به‌گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آن‌گاه مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. به‌طور کلی اگر طول پاره‌خط MN جزء داده‌ها یا خواسته‌های مسأله باشد، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



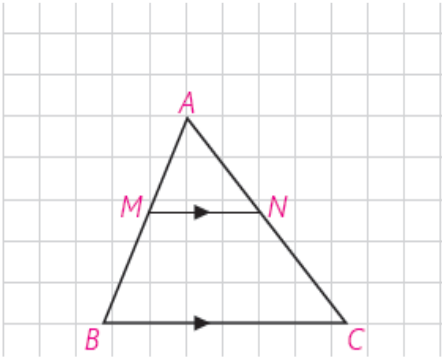
$$\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}}$$

اثبات:

نتیجه: اضلاع مثلث AMN با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب است و در ضمن زاویه‌های آن‌ها نیز برابر می‌باشد (دو مثلث متشابه‌اند).



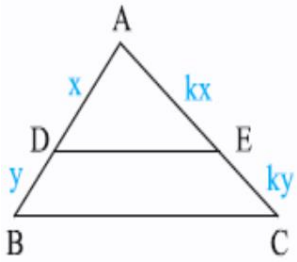
کار در کلاس



در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$، طبق قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

..... ⇒ .....

۳ـ عکس قضیهٔ تالس: اگر در یک مثلث خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.

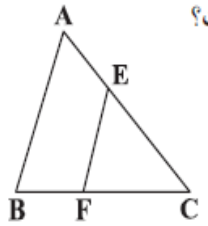


$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

اثبات:

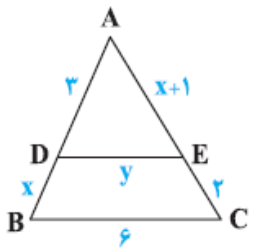
سوال:

۲۹- در شکل مقابل $AB \parallel FE$ ، $BF = m+1$ ، $AE = 3m+1$ و $\frac{EC}{FC} = \frac{5}{3}$ می‌باشد. طول پاره‌خط AE کدام است؟



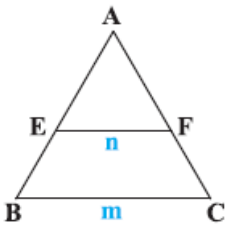
۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۳

۳۰- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ است. $x+y$ کدام است؟



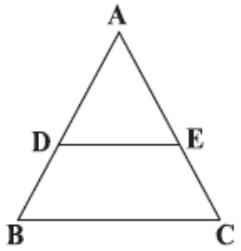
۱) ۵/۶
۲) ۶
۳) ۴/۶
۴) ۵

۳۱- در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ ، $AB = 12$ ، $BC = m$ و $EF = n$ می‌باشد. اگر $2m^2 - mn - 3n^2 = 0$ باشد، طول پاره‌خط AE کدام است؟



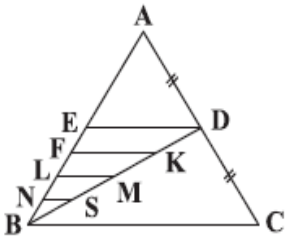
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۹

۳۲- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$، $DE = ۳$ و $BC = ۴$ است. حاصل $\frac{AD + AE}{DB + EC}$ کدام است؟



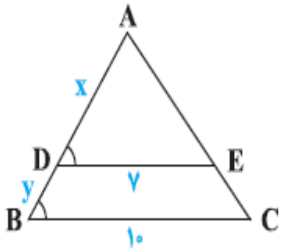
۱) ۳
۲) ۲
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۷}$

۳۳- در شکل مقابل، تمام پاره‌خط‌های افقی موازی قاعدهٔ BC می‌باشند. اگر $EF = FL = LN = NB$، $NS = ۲$ و D وسط ضلع AC باشد، طول ضلع BC کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۴

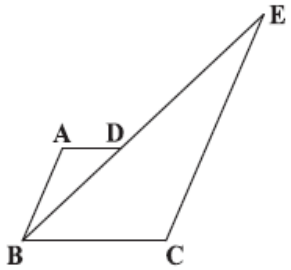
۳۴- در شکل مقابل، $\hat{B} = \hat{D}$ می‌باشد. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۱۰}$
۲) ۲
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۷}$

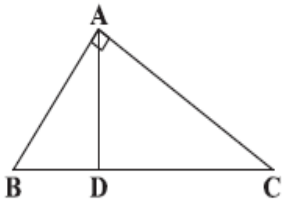
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۳۵- در شکل مقابل، $AD \parallel BC$ و $AB \parallel CE$ می‌باشد. اگر $AD = ۴$ ، $AB = ۶$ و $EC = ۱۵$ باشد، طول BC کدام است؟



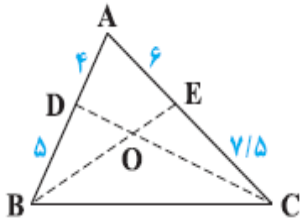
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۷

۳۶- در شکل مقابل، $AD = ۴$ ، $BD = ۲$ و $DC = ۶$ می‌باشد. طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۶
۲) $۲\sqrt{۶}$
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۱۰}$

۳۸- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟ تجربی خارج ۸۷



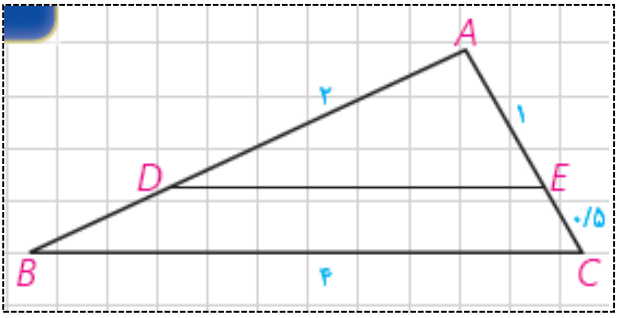
۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) ۱

هندسه پایه دهم **تدوین و گردآوری: ولی زاده**

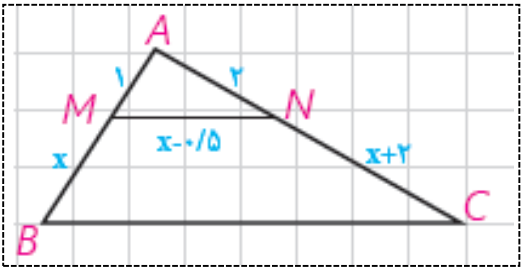
کانال تلگرام: *@mathvalizadeh*

تمرین

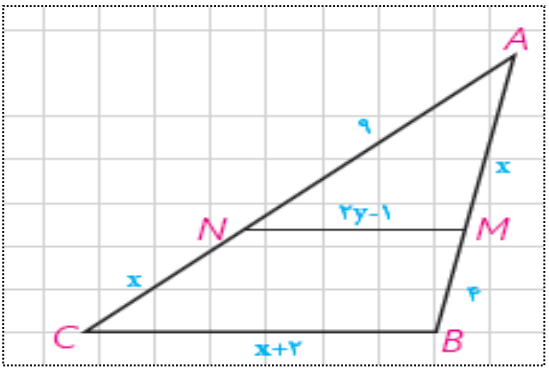
۱ــ در شکل مقابل DE||BC؛ با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.

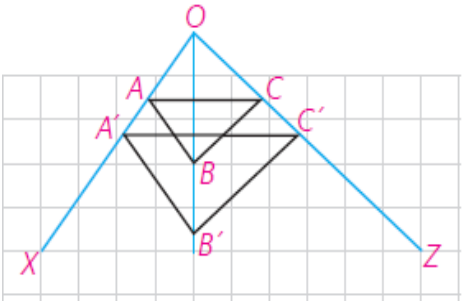


۲ــ در شکل مقابل، اگر MN||BC؛ مقدار x را به‌دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

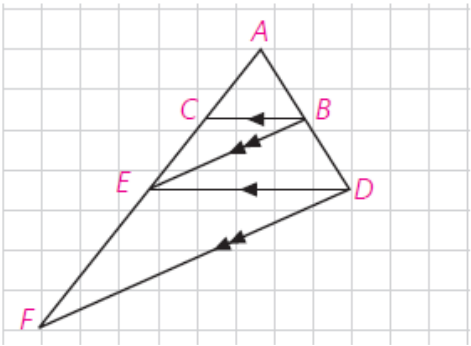


۳ــ در شکل مقابل MN||BC؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

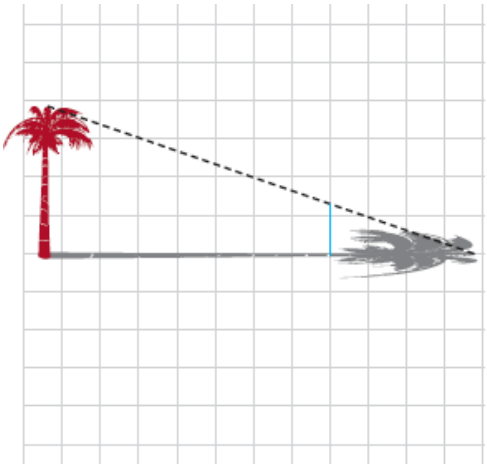




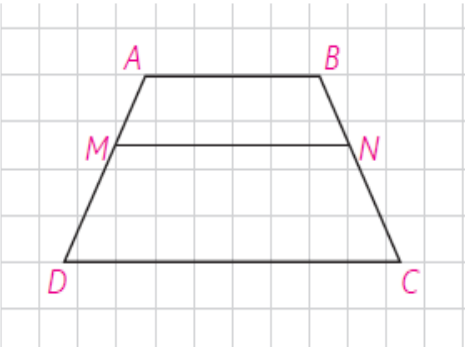
۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$



۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید : $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



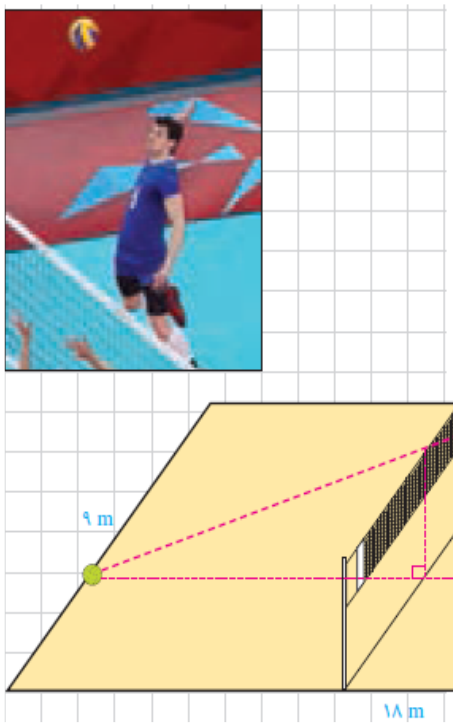
۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



۷ــ در ذوزنقه مقابل MN||AB||CD ، ثابت کنید :

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده‌است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده‌است؟

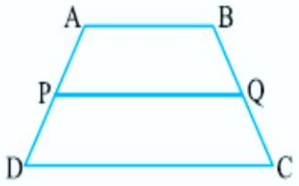
قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه

اگر وسط دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی به دست می‌آید که با قاعده‌ها موازی است و طول آن برابر میانگین طول دو قاعده است.

اثبات:

مثال ثابت کنید دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازهٔ آن مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو قاعده است.

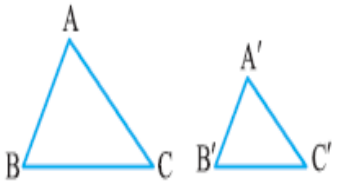
مثال در ذوزنقهٔ شکل روبه‌رو، پاره‌خط PQ موازی قاعده‌هاست. اگر $\frac{AP}{PD}=\frac{m}{n}$، نشان دهید $PQ=\frac{n.AB+m.CD}{m+n}$.



درس سوم

تشابه مثلث‌ها

شما خیلی خوب معنای تشابه مثلث‌ها را می‌دانید. دو مثلث متشابه دارای سه زاویهٔ دوبه‌دو برابر و اضلاعِ متناسب هستند.



$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}',\ \hat{C}=\hat{C}'\\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\end{cases}$$

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$MN \| BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

اثبات:

توجه 1:

ما سه حالت داریم که در آن‌ها دو مثلث متشابه‌اند. یعنی هر کدام از سه حالت تشابه که اتفاق بیفتد ما می‌توانیم دو مثلث را در شرایط قضیهٔ اساسی تشابه قرار دهیم. این سه حالت به صورت زیر هستند:

۱ حالت دو زاویهٔ برابر

۲ حالت سه ضلع متناسب

۳ حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر

توجه 2:

وقتی دو مثلث متشابه می‌شوند، بین آن‌ها می‌توانیم یک تناسب بنویسیم که مقدار تناسب همان نسبت تشابه است. مثلاً اگر $\overset{\Delta}{A'B'C'} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ باشد، تناسب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ را داریم که عدد k و طبیعتاً $\frac{1}{k}$ نسبت تشابه دو مثلث است.

چند نکته

۱ اضلاع یک کسر در نسبت تشابه باید روبه‌روی زاویه‌های برابر باشند.

۲ در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو جزء فرعی برابر k است. فقط باید دقت کنید که دو جزء فرعی باید متناظر هم باشند. مثلاً ارتفاع‌های AH و $A'H'$، نیمسازهای AD و $A'D'$، میانه‌های AM و $A'M'$ که معنایش تناسب $\frac{AH}{A'H'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AM}{A'M'}=\cdots=k$ است.

۳ نسبت محیط دو مثلث متشابه k و نسبت مساحت آن‌ها برابر k^2 است.

مثال در مثلث ABC، نقاط M، N و P نقاط وسط سه ضلع مثلث هستند:

الف) نشان دهید $\overset{\Delta}{MNP} \sim \overset{\Delta}{ABC}$.

ب) نشان دهید محیط مثلث MNP، نصف محیط مثلث ABC و مساحت مثلث MNP، یک چهارم مساحت مثلث ABC است.

مثال یک نقطهٔ دلخواه داخل مثلثی با مساحت S در نظر بگیرید. از این نقطه خطوطی موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم تا مثلث به شش ناحیه تقسیم شود. مساحت سه مثلث ایجادشده را S_1، S_2 و S_3 می‌نامیم. نشان دهید: $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

قضایای تشابه مثلث ها:

قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات:

قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A=\angle A', \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

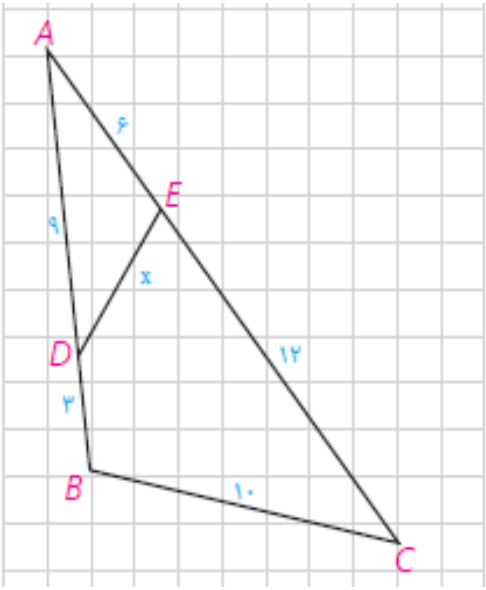
قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

اثبات:

مثال : در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط AC، زاویهٔ NMC را مساوی زاویهٔ B جدا کرده‌ایم. اگر NC=۲ و NB=۴، طول AC را به دست آورید.

مثال : در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.



اثبات قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم‌الزاویه

سوال 1:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

حل:

سوال 2:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

۱) $AB^2=BC.BH$

۲) $AC^2=BC.CH$

۳) $AB^2+AC^2=BC^2$

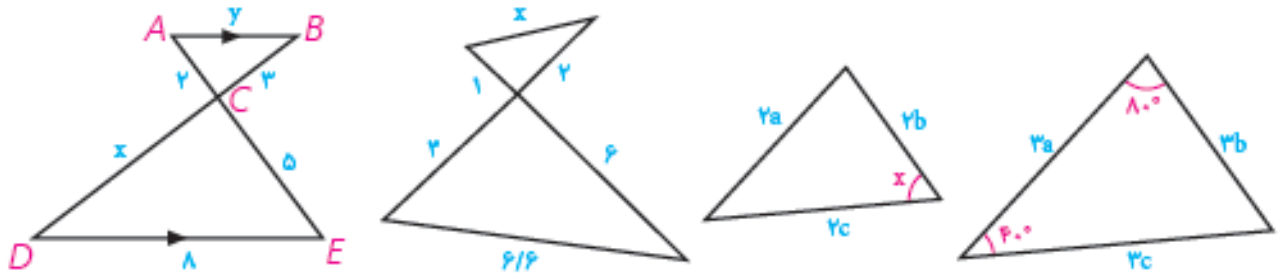
۴) $AH^2=BH.CH$

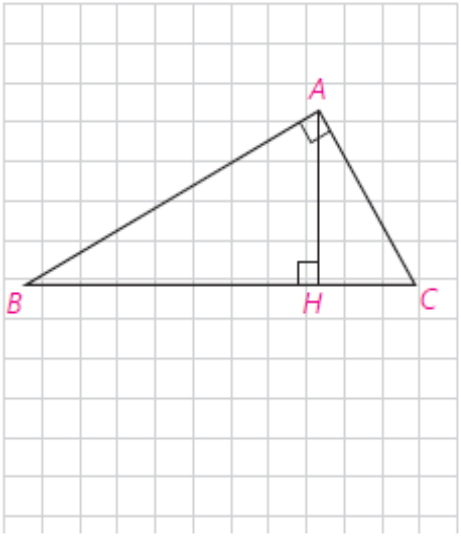
۵) $AH\times BC=AB\times AC$

حل:

تمرین

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y را مشخص کنید :





۲ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=۹۰^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

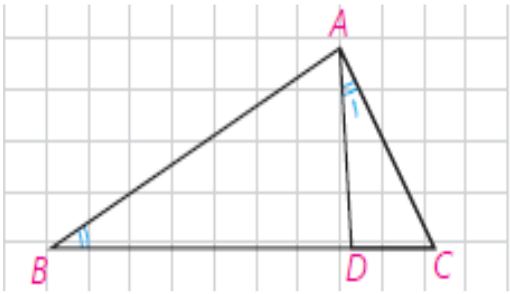
۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

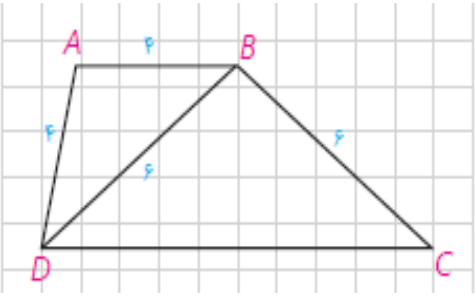
۲) AB=۱۰ , BC=۱۲ , AC=? , AH=?

۳) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

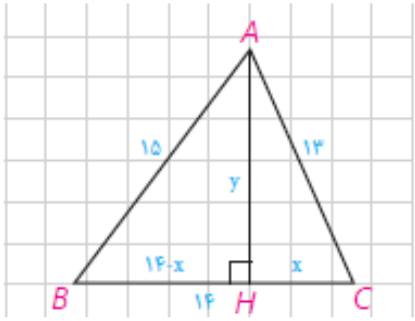
۴) AB=۸ , AH=۴ , BC=? , AC=?

۳ــ در شکل روبه‌رو $\angle A_1=\angle B$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به‌دست آورید.

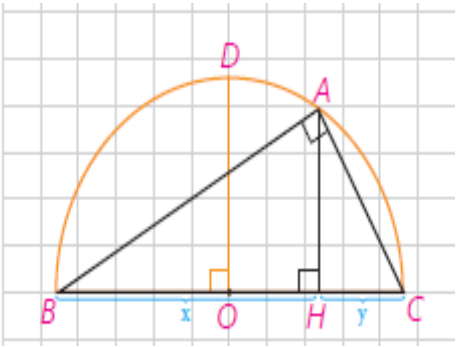




۴ــ در شکل روبه‌رو ABCD ذوزنقه است. طول قاعدهٔ CD را به‌دست آورید.



۵ــ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۷ــ در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.

الف) چرا زاویهٔ A قائمه است؟

ب) برای نقطهٔ A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

OD ☐ AH

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

۸ــ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A'} = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن‌را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=\cdots=\frac{a_n}{n}$، آن‌گاه حاصل $a_1+a_2+\cdots+a_n$ چند برابر a_1 است؟

۱) n ۲) $n(n+1)$ ۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ ۴) $2n$

۲- اگر b واسطهٔ هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$ ۳) $\frac{b-c}{a-b}=\frac{b}{c}$ ۴) $\frac{b+c}{a+b}=\frac{c}{b}$

۳- اگر $\frac{a}{b}=\frac{2c}{3d}=k$، آن‌گاه حاصل $\frac{\sqrt{a^4+8a^2c^2+16c^2}}{b^2+9d^2}$ کدام است؟

۱) k ۲) $2k$ ۳) k^2 ۴) $4k^2$

۴- اگر $\frac{a}{2b}=\frac{3c}{d}=\frac{3e}{2f}=k>0$، حاصل $\frac{\sqrt{a^2+9c^2+9e^2}}{\sqrt{4b^2+d^2+4f^2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{k}$ ۲) k ۳) $2\sqrt{k}$ ۴) $4k$

۵- اگر $AB=a$ و $\frac{MA}{MB}=k$ $(k>1)$، طول پاره‌خط MB کدام است؟ (M بین A و B)

۱) $\frac{ka}{k+1}$ ۲) $\frac{a}{k+1}$ ۳) $\frac{a}{k-1}$ ۴) $\frac{ka}{k-1}$

۶- اگر $AB=a$ و $\frac{NA}{NB}=k$ $(k>1)$، طول NA کدام است؟ (N روی امتداد AB)

۱) $\frac{ka}{k+1}$ ۲) $\frac{a}{k+1}$ ۳) $\frac{a}{k-1}$ ۴) $\frac{ka}{k-1}$

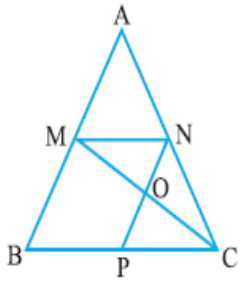
۷- اگر $AB=a$ و N نقطه‌ای روی امتداد AB باشد به گونه‌ای که $\frac{NA}{NB}=k$ $(k<1)$، طول NB کدام است؟

۱) $\frac{ka}{1+k}$ ۲) $\frac{a}{1+k}$ ۳) $\frac{a}{1-k}$ ۴) $\frac{ka}{1-k}$

۸- اگر MN و AB دو پاره‌خط باشند که روی یک خط قرار دارند، $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=k$ و طول پاره‌خط $AB=a$، آن‌گاه طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) $\frac{ak}{k^2-1}$ ۲) $\frac{2ak}{k^2-1}$ ۳) $\frac{ak}{1-k^2}$ ۴) $\frac{2ak}{|1-k^2|}$

۹- در شکل مقابل، MNPB متوازی‌الاضلاع است. اگر مساحت مثلث OMN، ۶۰ درصد مساحت مثلث AMN باشد، نسبت PC به MN کدام است؟

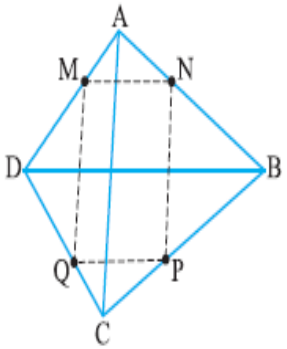


۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۰- وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی الزاماً رئوس کدام چهارضلعی هستند؟

۱) لوزی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) مستطیل ۴) مربع

۱۱- در شکل مقابل، MNPQ یک لوزی است که اضلاع آن موازی قطرهای ABCD است. اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{3}{5}$، نسبت قطرِ AC به BD کدام است؟



۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، مربعی چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و یک رأس آن روی رأس A قرار دارد. اگر ضلع مربع x باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) 2x ۴) $\frac{2}{x}$

۱۳- در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط ضلع BC، خطی به موازات نیمساز داخلی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. اگر $AC=9$ و $BE=8$، طول CF کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

درس چهارم

کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\angle A_1 = \angle A_2$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات:

مثال : در مثلث ABC ، AB=۷ ، AC=۵ و BC=۸ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

مثال اگر در مثلث ABC، AD و AD′ به ترتیب نیمساز زوایای داخلی و خارجی A باشند، طول پاره‌خط‌های BD، CD، CD′ و DD′ را برحسب اضلاع مثلث بیابید.

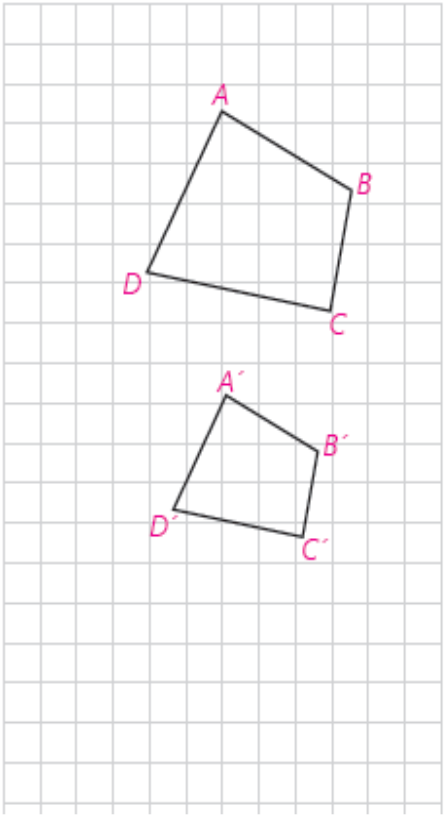
پاسخ:

۲ــ نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

اثبات:

کار در کلاس



چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱ــ اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲ــ قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید :

$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳ــ جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \cdots , \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \cdots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \cdots \Rightarrow \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \cdots$$

توجه:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

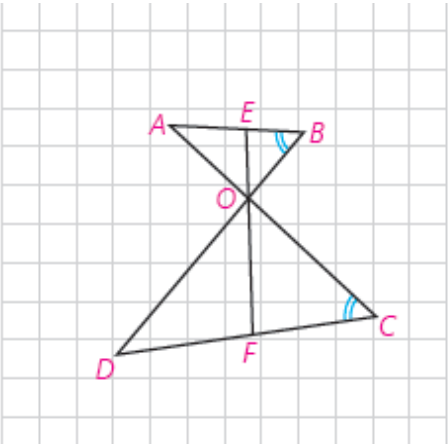
کار در کلاس

۱ــ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲ــ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳ــ اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

فعالیت



در شکل روبه‌رو EF=۱۰cm نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.

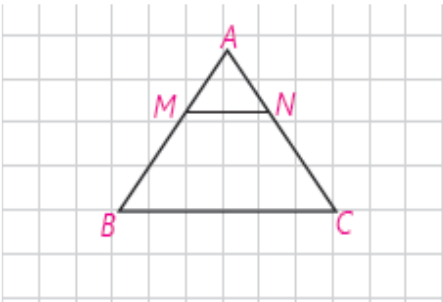
الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{۲}{۳}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

تمرین

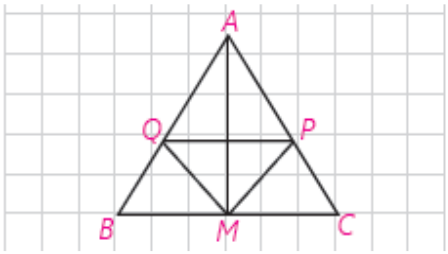
۱ــ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.



۲ــ در شکل روبه‌رو MN ∥ BC است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.

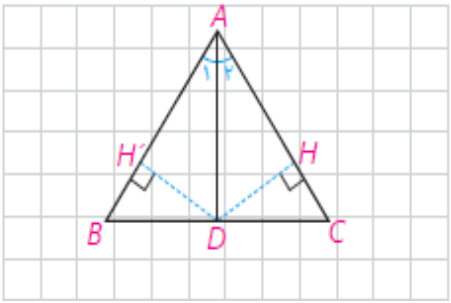
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۳ــ در مثلث ABC ، AB=۷ و AC=۵ و BC=۱۰ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.



۴ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید :

$PQ \parallel BC$



۵ــ در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویهٔ A است و عمودهای DH و DH′ نیز رسم شده‌اند.

الف) با توجّه به نتیجهٔ (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

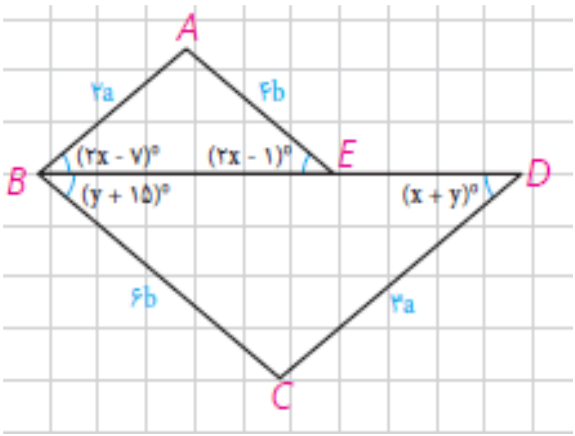
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

ب) چرا DH=DH′ ؟ با توجّه به این موضوع و نتیجهٔ (۱) از درس اوّل بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید :

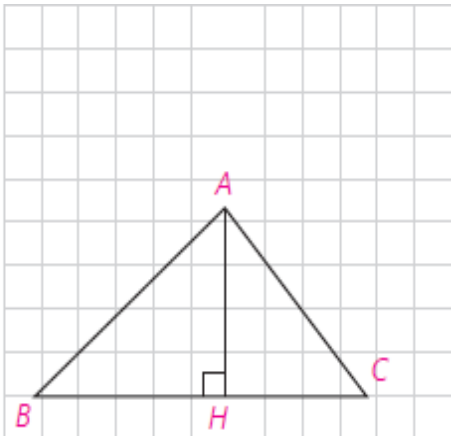
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیهٔ نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

۶ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



۷ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجّه به این موضوع،



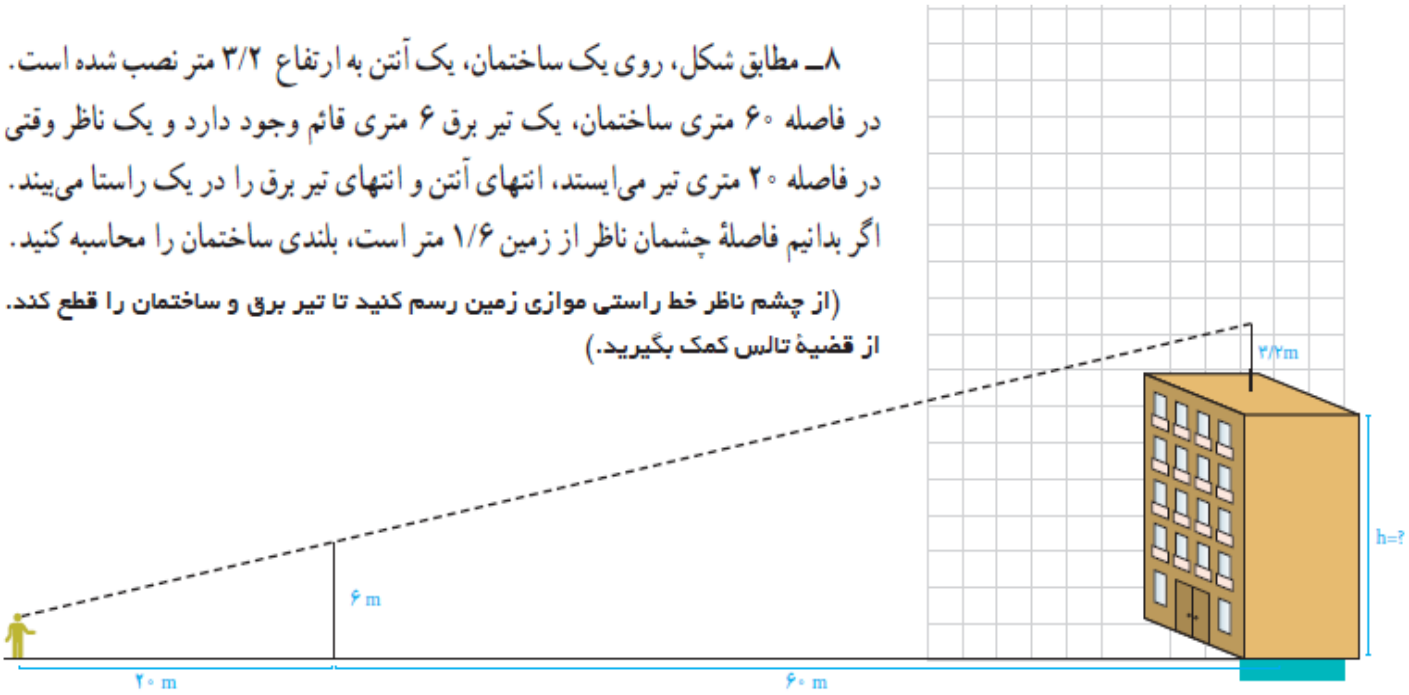
الف) ثابت کنید :

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^۲ \quad , \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۸ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)



۱-جاهای خالی را کامل کنید . ۱

الف)مثالی که نشان می دهد ، یک حکم کلی نادرست است را ..... می نامند .

ب)ارتفاع وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه ، آن را به دو مثلث ..... تقسیم می کند .

ج)اگر نقطه ای روی ..... یک پاره خط قرار داشته باشد ، آن نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

د)در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی از هر زاویه ی داخلی غیر مجاورش ..... است .

۲-عکس قضیه ی زیر را نوشته و سپس آن را به صورت یک قضیه ی دو شرطی بنویسید . ۱

اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد ، قطرهایش همدیگر را نصف می کند .

۳-روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای خارجآن را توضیح دهید و شکل دقیق آن را رسم کنید . ۱/۵

۴-متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ سانتی متر و طول یک قطر آن ۶ سانتی متر می باشد . طریقه ی رسم را توضیح دهید . ۱/۵

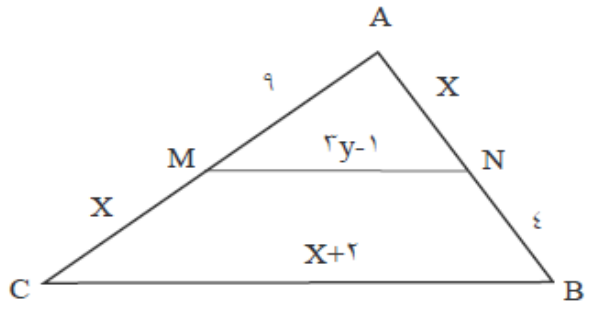
۵-طول های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی متر است . بلند ترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$ سانتی متر می باشد . طول های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید . ۱/۵

۶-به روش برهان خلف ثابت کنید . اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ضلع مقابل به زاویه ی بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه ی کوچکتر ، بزرگ تر است . ۱

۷-ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث همرسند . ۱/۵

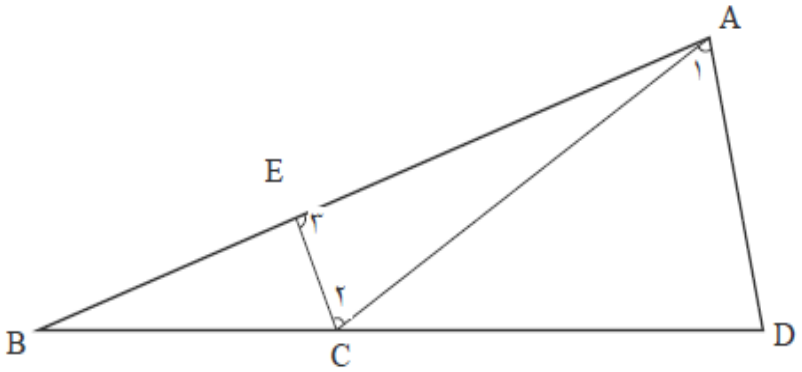
۸-اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ باشد حاصل $x+y+z$ را بیابید . ۱

۹-در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را بیابید . ۱/۵



۱۰-در ذوزنقه ی ABCD ، $(BC \parallel AD)$ امتداد ساق ها یکدیگر را در نقطه ی O قطع می کنند از c خطی به موازات قطر BD رسم کرده تا امتداد AB را در E قطع کند . ثابت کنید : ۱/۵

۱۱- در شکل مقابل زوایای $\hat{۳} = \hat{۲} = \hat{۱}$ اگر AB=۱۵ و AC=۶ باشد $\frac{BD}{CD}$ را بیابید . ۱



۱۲-قضیه : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند . ۱/۵

۱۳-ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه ی هندسی است بین دو قطعه ی ایجاد شده روی وتر . ۱/۵

۱۴-اندازه ی سه ضلعمثلثی ۱۶ و ۲۲ و ۱۹ سانتی متر هستند . اندازه ی پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه متوسط بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید . ۱/۵

۱۵-اندازه های اضلاع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ می باشد . اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ متشابه باشد آن گاه مساحت مثلث دوم را بیابید . ۱/۵

موفق باشید

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

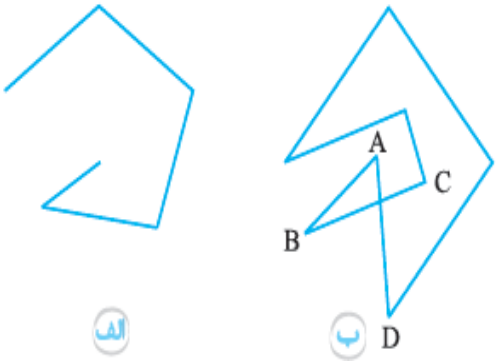
چندضلعی

شکلی است بسته که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد (در حقیقت شامل $n \geq ۳$ پاره‌خط)، طوری‌که نقاط انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند. به عبارت دیگر هر دو پاره‌خطی که در یک انتها مشترک‌اند، خودشان در یک امتداد نباشند (با هم زاویه‌ی غیر از ۱۸۰° بسازند)؛ هم‌چنین پاره‌خط‌ها فقط در نقاط انتهایی‌شان، یکدیگر را قطع کنند.

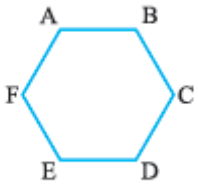
مثلاً شکل‌های الف و ب که رسم شده‌اند چندضلعی نیستند:

الف به دلیل این‌که یک شکل بسته نیست، چندضلعی نمی‌باشد.

ب هم به دلیل این‌که AD و BC یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی خود قطع کرده‌اند، چندضلعی نخواهد بود.



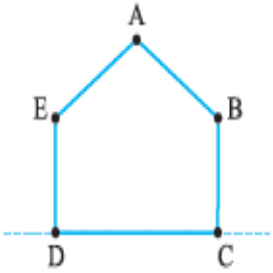
اما شکل زیر یک چندضلعی است:



در این چندضلعی، پاره‌خط‌های AB، BC، CD، DE، EF و FA اضلاع چندضلعی (شش ضلعی) ABCDEF بوده و نقاط A، B، C، D، E و F رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. به عبارت دیگر هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطه‌ی مشترک آن دو ضلع را رأس می‌گوییم. هم‌چنین رئوس دو سر یک ضلع، رئوس مجاورند (مثل E و D). اگر تعداد اضلاع یا رئوس یک چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌گوییم.

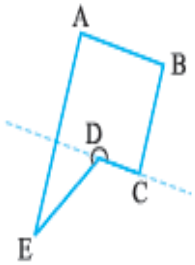
تعریف n ضلعی محدب:

یک n ضلعی را محدب می‌گوییم هرگاه با امتداد هر ضلع از طرفین، کل شکل (بقیه‌ی نقاط چندضلعی) در یک طرف آن واقع شوند. به عبارت دیگر تمام زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب، کم‌تر از 180° است.

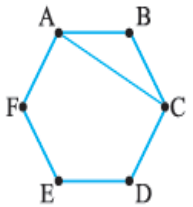


مطابق شکل، پنج‌ضلعی ABCDE یک پنج‌ضلعی محدب است. در این شکل ضلع CD را از طرفین امتداد داده‌ایم و کل شکل یک طرف این خط قرار گرفته است (شما هم هر دفعه یکی از اضلاع را امتداد دهید و محدب‌بودن پنج‌ضلعی ABCDE را بررسی کنید). هم‌چنین تمام زاویه‌های داخلی مثل $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ قطعاً کم‌تر از 180° است.

اگر n ضلعی، محدب نباشد آن را مقعر می‌گوییم. در n ضلعی مقعر با امتداد حداقل یکی از اضلاع، قسمتی از شکل در یک طرف و بقیه‌ی شکل در طرف دیگر خط موردنظر واقع می‌شود. در حقیقت حداقل یکی از زاویه‌های داخلی n ضلعی مقعر بیش از 180° است.



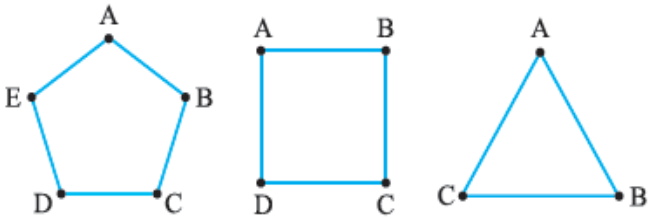
مطابق شکل پنج‌ضلعی ABCDE مقعر است. با امتداد ضلع CD از طرفین، قسمتی از شکل در یک طرف این خط قرار می‌گیرد؛ در حقیقت $C\hat{D}E > 180^\circ$.



تعریف قطر در چندضلعی، پاره‌خطی است که رئوس غیرمجاور در یک n ضلعی را به هم وصل می‌کند.

در شکل روبه‌رو رئوس A و C غیرمجاور بوده و پاره‌خط AC را قطر این شش‌ضلعی می‌گوییم.

مثال مطابق شکل‌های روبه‌رو یک سه‌ضلعی (مثلث)، یک چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی وجود دارند. از هر رأس به تمام رئوس دیگر وصل کنید و تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده را بیابید.



توجه:

با استفاده از استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی، از جمله ضلع و قطر، عبارت است از $\frac{n(n-1)}{2}$. (البته با استفاده از خواص دنباله یا تصاعد حسابی می‌توان ثابت کرد که تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده در n ضلعی یعنی $(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0$ برابر است با $\frac{n(n-1)}{2}$.)

مثال 1:

تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (ضلع‌ها و قطرها) در یک ۱۰ ضلعی را بیابید.

مثال 2:

تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی برابر است با ۱۰. مقدار n را بیابید.

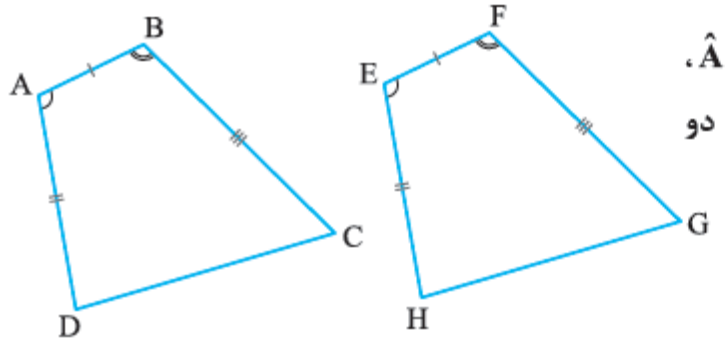
سوال 1:

با توجه به تعریف قطر، فرمولی برای پیداکردن تعداد کل قطرهای مرسوم در یک n ضلعی محدب بیابید.

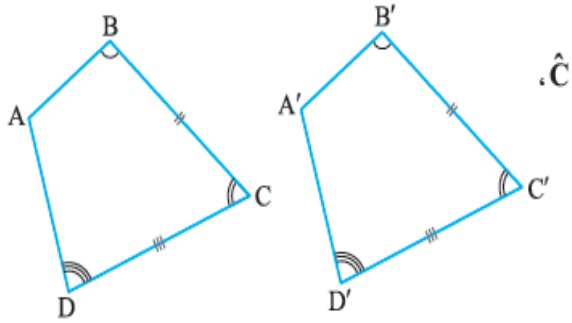
مثال 3:

تعداد قطرهای یک هفت‌ضلعی را بیابید.

سوالات امتحانی:



۱- در دو چهارضلعی مقابل $AD = EH$ ، $\hat{A} = \hat{E}$ ، $AB = EF$ ، $\hat{B} = \hat{F}$ و $BC = FG$. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.



۲- در شکل روبه‌رو دو چهارضلعی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ با شرطهای $\hat{D} = \hat{D}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $\hat{C} = \hat{C}'$ ، $BC = B'C'$ و $CD = C'D'$ رسم شده‌اند. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.

۳- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی منتظم برابر است با ۲۸. در این صورت هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی چند درجه است؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۴- تعداد قطرهای یک n ضلعی، برابر ۳۵ است. n را بیابید.

۵- تعداد قطرهای یک n ضلعی منتظم، ۳ برابر تعداد اضلاع آن است. هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی منتظم کدام است؟

۶- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (از جمله ضلع و قطر) در یک n ضلعی منتظم، چهار برابر تعداد اضلاع آن است. در این صورت هر زاویه‌ی خارجی این شکل را بیابید.

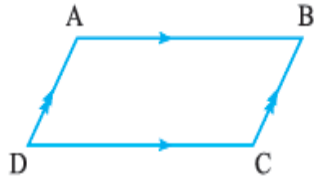
۷- مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی، سه برابر مجموع زاویه‌های خارجی آن است. تعداد قطرهای این شکل را بیابید.

۸- اگر یک واحد به اضلاع یک n ضلعی اضافه شود، به تعداد قطرهای آن چند واحد اضافه می‌شود؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

چهارضلعی‌های مهم

متوازی‌الاضلاع



تعریف متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن دوبه‌دو با هم موازی‌اند.

ABCD : متوازی‌الاضلاع $\Leftrightarrow AB \parallel CD , AD \parallel BC$

قضیه در هر متوازی‌الاضلاع، دو ضلع مقابل با هم مساوی‌اند.

اثبات:

قضیه 2:

نشان دهید اگر ضلع های مقابل یک چهارضلعی دو به دو با هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیه 3:

ثابت کنید هرگاه قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

قضیه 4:

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

اثبات:

قضیه 5:

ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

قضیه 6:

نشان دهید در هر متوازی الاضلاع زوایای هر دو زاویه مجاور مکمل همدیگرند.

اثبات:

قضیه 7:

نشان دهید اگر در هر چهارضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

سوال 1:

اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD نیمساز دو زاویه‌ی مجاور دلخواه را رسم کنیم، زاویه‌ی حاصل بین این دو نیمساز کدام است؟

قضیه 8:

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، زوایای رو به رو با هم برابرند.

اثبات:

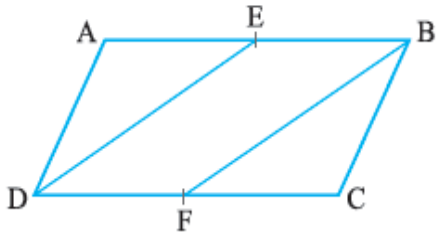
قضیه 9:

ثابت کنید اگر در هر چهارضلعی، زوایای رو به رو با هم برابر باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

سوال 2:

مطابق شکل، نقاط E و F به ترتیب وسط اضلاع AB و DC از متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. ثابت کنید DE = FB .



سوال 3:

از محل برخورد دو قطر متوازی‌الاضلاع، خطی موازی دو ضلع روبه‌روی آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید این خط از وسط دو ضلع دیگر می‌گذرد.

سوال 4:

می‌دانیم اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. حال به کمک این مطلب، ثابت کنید اگر

در یک چهارضلعی تمام زاویه‌های مجاور مکمل هم باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مستطیل

نتیجه‌مهم می‌دانیم از بین دو خط موازی، اگر یکی بر خط سومی عمود باشد، دیگری هم عمود است پس در هر مستطیل تمام چهار زاویه قائمه‌اند.

در هر مستطیل، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:

۱) **در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید عکس این قضیه (حکم درست و کلی) برقرار نیست. یعنی اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، **لزومی ندارد** که این چهارضلعی مستطیل باشد. در حالی که فقط متوازی‌الاضلاع بودن آن قطعی است.

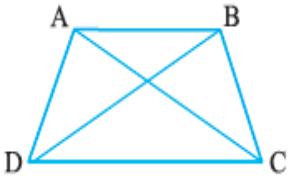
۲) **در هر مستطیل زاویه‌های روبه‌رو برابر و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.** (قطعاً با زاویه‌های 90° چنین مطلبی درست است) عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی از این‌که در یک چهارضلعی زاویه‌های روبه‌رو برابر یا زاویه‌های مجاور مکمل هم باشند **نمی‌توان گفت** این چهارضلعی مستطیل است (ولی حتماً متوازی‌الاضلاع هست).

۳) **در هر مستطیل هر دو ضلع روبه‌رو برابرند.**

عکس این قضیه هم **برقرار نیست**. فقط از این‌که در یک چهارضلعی **هر دو ضلع روبه‌رو** مساوی باشند، می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و به 90° بودن زاویه‌ها اصلاً ارتباط ندارد.

سوال 1:

ثابت کنید در هر مستطیل قطرها برابرند.



دقت کنید عکس این مثال (قضیه) برقرار نیست. در شکل روبه‌رو قطرهای چهارضلعی ABCD مساوی هستند ولی این چهارضلعی مستطیل نیست.

سوال 2:

هر متوازی‌الاضلاع که در آن طول قطرها مساوی باشند، مستطیل است.

سوال 3:

ثابت کنید: الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

ب) اگر در مثلثی اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلعی، نصف آن ضلع باشد، زاویه‌ی روبه‌روی آن ضلع، قائم‌الزاویه است.

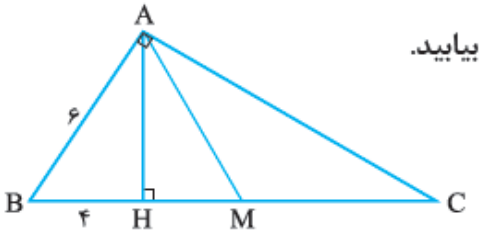
نتیجه‌مهم با رسم میانه‌ی نظیر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین به وجود می‌آید.

سوال 4:

یکی از زاویه‌های حاده در مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۲۰° است. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث را بیابید.

سوال 5:

مطابق شکل AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه است. طول AM را بیابید.



سوال 6:

ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه:

الف) یکی از زاویه‌ها ۳۰° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه نصف وتر است.

ب) یکی از زاویه‌ها ۶۰° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر وتر است.

ج) یکی از زاویه‌ها ۴۵° باشد، اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر وتر است.

سوال 7:

ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع نامساوی، یک مستطیل پدید می‌آید.

سوال 8:

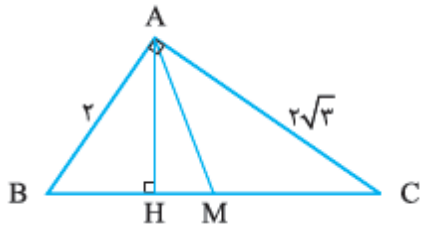
ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع به وجود می‌آید اگر ابعاد این مستطیل a و b باشد طول ضلع مربع حاصل را برحسب a و b بیابید.

سوال 9:

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول دو ضلع قائم ۳ و ۴ است. طول میانه‌ی وارد بر وتر را بیابید.

سوال 10:

مطابق شکل $AB = ۲$ و $AC = ۲\sqrt{۳}$. در این صورت اگر AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، طول MH را بیابید.



سوال 11:

ثابت کنید اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زاویه‌ها ۱۵° (یا ۷۵°) باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

سوال 12:

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، یکی از زاویه‌ها 30° است. ثابت کنید ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

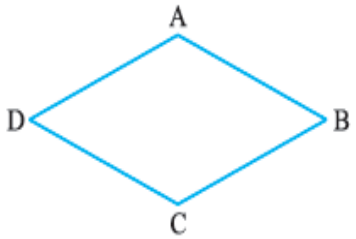
سوال 13:

مستطیلی به محیط ۲۰ و مساحت ۹ مفروض است. نیمسازهای داخلی این مستطیل را رسم کرده‌ایم. محیط شکل حاصل را بیابید.

سوال14:

نیمسازهای داخلی یک مستطیل را رسم کرده‌ایم و طول قطر مربع حاصل از رسم این نیمسازها ۸ شده است. اگر طول مستطیل سه برابر عرض آن باشد، مساحت مستطیل را بیابید.

لوزی



تعریف لوزی، نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی باشد. می‌توان گفت هر چهارضلعی که دارای چهار ضلع مساوی باشد یک لوزی است، زیرا وقتی مطابق شکل $AB = BC = CD = AD$ باشد، خودبه‌خود اضلاع روبه‌رو، دوبه‌دو مساوی شده و یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که هر دو ضلع مجاورش مساوی‌اند؛ پس ABCD در نهایت یک لوزی می‌باشد.

در هر لوزی، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:

۱ **در هر لوزی قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید عکس این قضیه **برقرار نیست**. یعنی هر چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگرند، **لزومی ندارد** لوزی باشد.

۲ **در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.**

عکس این قضیه هم در حالت کلی **برقرار نیست**.

۳ **در هر لوزی اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.**

عکس این قضیه هم در حالت کلی **درست نخواهد بود**.

سوال 1:

ثابت کنید در هر لوزی:

الف) قطرها بر هم عمودند.

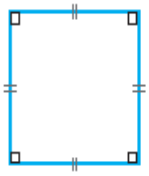
ب) قطرها نیمساز زاویه‌های لوزی می‌باشند.

نتیجه قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگر و هم‌چنین نیمساز زاویه‌های آن می‌باشند.

سوال 2:

در یک لوزی به طول ضلع ۴، اندازه‌ی یک زاویه ۱۲۰° است. قطر کوچک و بزرگ لوزی را بیابید.

مربع



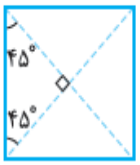
تعریف مربع، نوعی مستطیل است که اضلاع مجاور آن مساوی‌اند. یا این‌که نوعی لوزی است که تمام زاویه‌هایش ۹۰° است.

در هر مربع، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است، از جمله:

۱) در هر مربع قطرها منصف یکدیگرند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.

۲) در هر مربع زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند. (همه‌ی زاویه‌ها ۹۰° هستند)

۳) در هر مربع اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.



چون مربع یک نوع مستطیل خاص است پس قطرهایش مساوی‌اند و چون یک نوع لوزی خاص است، پس قطرهایش بر هم عمود بوده و نیمساز زاویه‌های مربع نیز می‌باشند.

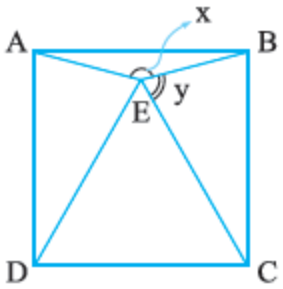
از برخورد نیمسازهای یک لوزی یا مربع (که همان قطرها هستند) شکلی حاصل نمی‌شود (فقط یک نقطه درمی‌آید).

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

سوال 1:

مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است.

مقادیر x و y را بیابید.

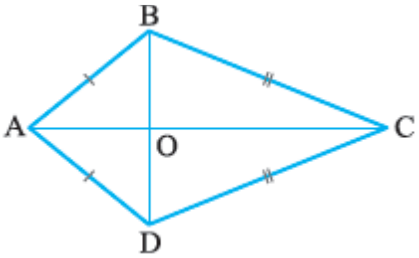


سوال 2:

در چهارضلعی **ABCD** (که آن را شبه‌لوزی یا کایت می‌گوییم) اضلاع مجاور با هم مساوی‌اند. ثابت کنید:

الف) قطر **AC** نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

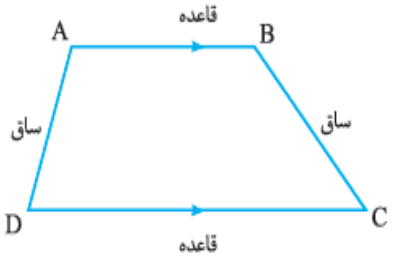
ب) قطرها بر هم عمودند.



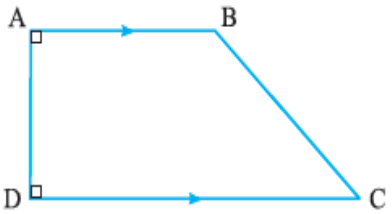
ذوزنقه

تعریف ذوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی باشند.

مطابق شکل، ذوزنقه‌ی ABCD نمایش داده شده است. هریک از دو ضلع موازی با هم را قاعده و هر یک از دو ضلعی که با هم غیر موازی‌اند را ساق می‌گوییم. دو نوع ذوزنقه‌ی خاص و بسیار مهم داریم که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم:

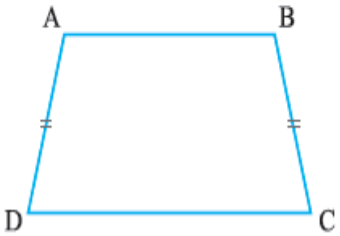


الف) **ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه**، اگر در یک ذوزنقه، یکی از ساق‌ها بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌گوییم.



دقت کنید در شکل روبه‌رو یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه نشان داده شده است. چون قاعده‌ها با هم موازی‌اند، پس وقتی ساق AD بر قاعده‌ی AB عمود است بر پاره‌خط موازی آن یعنی قاعده‌ی DC هم عمود خواهد بود. در این حالت AD را ساق قائم و BC را ساق غیرقائم (مایل) ذوزنقه می‌گوییم.

ب) **ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین**، اگر در یک ذوزنقه، طول ساق‌ها با یکدیگر مساوی باشد، ذوزنقه را متساوی‌الساقین می‌نامیم.



سوال 1:

ثابت کنید در هر ذوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگرند.

سوال 2:

ثابت کنید در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به دو ساق هم‌اندازه‌اند.

سوال 3:

به کمک همنهشتی مثلث‌ها ثابت کنید پاره‌خطی که وسط دو ضلع از مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم بوده و طول آن نصف ضلع سوم است.

سوال 4:

ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک چهارضلعی را به یکدیگر به صورت متوالی وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است. محیط این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

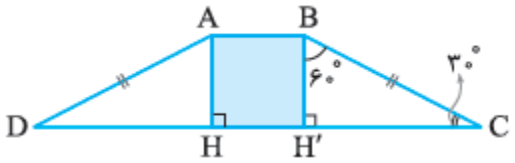
سوال 5:

مطابق شکل، ذوزنقه‌ی ABCD متساوی‌الساقین است. از رئوس A و B بر قاعده‌ی بزرگ عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $CH = DH' = \frac{DC - AB}{۲}$

سوال 6:

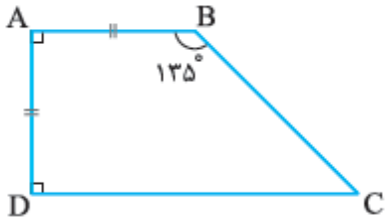
مطابق شکل، ABCD یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و چهارضلعی ABH′H یک مربع است.

اگر مساحت این مربع ۱۶ باشد، محیط ذوزنقه را بیابید.



سوال 7:

در ذوزنقه‌ی روبه‌رو ثابت کنید طول قاعده‌ی بزرگ، دو برابر طول قاعده‌ی کوچک است.



درس دوم

مساحت و کاربردهای آن

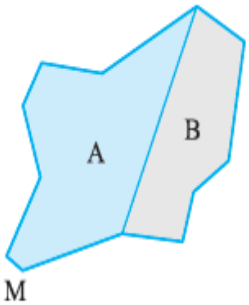
از این قسمت از درس، با بررسی اصول مهم مساحت، فرمول مساحت چندضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم. سپس برای هر کدام مسائل متنوعی طرح نموده و در نهایت مسئله‌ها را به صورت ترکیبی درمی‌آوریم.

اصول مهم مساحت در چند ضلعی‌ها

فرض می‌کنیم A ناحیه‌ی یک چندضلعی باشد. عدد مثبتی به نام مساحت به A نسبت داده و آن را با S(A) نمایش می‌دهیم. در این صورت موارد زیر برقرار است:

۱) $S(A) > 0$؛ به عبارت دیگر مساحت هر ناحیه در صفحه، عددی مثبت است.

۲) اگر اشتراک دو ناحیه‌ی چندضلعی فقط روی اضلاع یا رئوس آن‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشند مساحت اجتماع آن‌ها برابر است با مجموع مساحت‌های آن‌ها.



مثلاً در شکل روبه‌رو، ناحیه‌ی M به دو ناحیه‌ی A و B، تفکیک شده است. در این صورت $S(M) = S(A) + S(B)$.

۳) اگر دو مثلث همنهشت باشند، مساحت آن‌ها مساوی خواهد بود.

۴) مساحت مستطیلی با طول a و عرض b (ابعاد a و b) عبارت است از $S = ab$.

نتیجه مساحت مربعی به ضلع a برابر است با a^2.

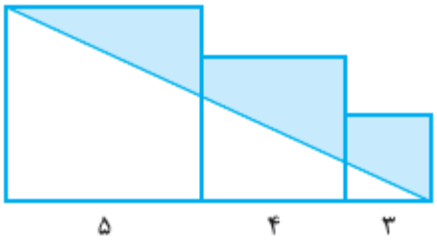
سوال 1:

به کمک فرمول مساحت مستطیل، ثابت کنید مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع قائم.

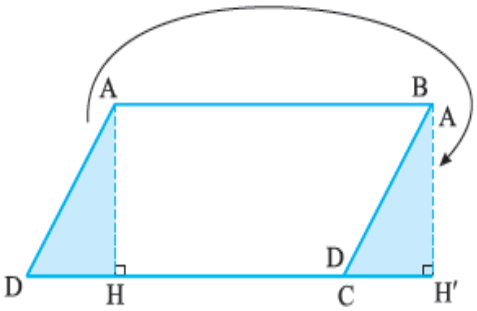
سوال 2:

در شکل روبه‌رو سه مربع به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ در کنار هم

واقع‌اند. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



مساحت متوازی‌الاضلاع برای این‌که مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را بیابیم، مطابق شکل از رأس A، ارتفاع AH را بر DC وارد می‌کنیم. حال مثلث AHD را بریده و طوری به سمت راست متوازی‌الاضلاع منتقل می‌کنیم که ضلع AD، روی ضلع BC منطبق شود.



چهارضلعی ABH′H یک مستطیل است، زیرا متوازی‌الاضلاعی است با یک زاویه‌ی °۹۰. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD با مساحت مستطیل ABH′H یکسان است:

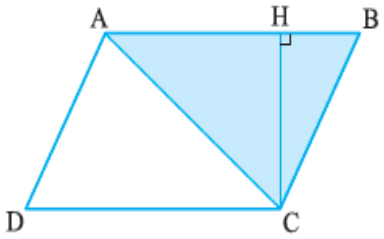
$$S_{\square ABH'H} = \underset{\text{طول مستطیل}}{AB} \times \underset{\text{عرض مستطیل}}{AH} \xrightarrow{S_{\square ABCD} = S_{\square ABH'H}} S_{\square ABCD} = AB \times AH = CD \times AH$$

به‌عبارت‌دیگر مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع در ارتفاع وارد بر آن.

سوال 3:

طول دو ضلع متوازی‌الاضلاعی ۲ و ۸ و ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر برابر ۴ است. طول ارتفاع دیگر این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

مساحت مثلث غیر مشخص برای محاسبه‌ی مساحت یک مثلث غیرمشخص، از فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم. مطابق شکل یک قطر دلخواه از متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم می‌نماییم. سپس از یکی از دو رأس این قطر عمودی بر ضلع مقابلش وارد می‌کنیم:

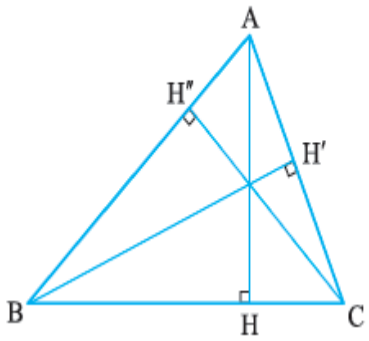


$$\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADC}: \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \\ AC = AC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ADC}} \qquad (۱)$$

$$\rightarrow S_{\overset{\square}{ABCD}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ADC}} \overset{\text{طبق}(۱)}{=} S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ABC}} \rightarrow \boxed{S_{\overset{\square}{ABCD}} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}} \qquad (۲)$$

از طرفی مساحت یک متوازی‌الاضلاع برابر است با ضرب ارتفاع در قاعده، یعنی $S_{\overset{\square}{ABCD}} = AB \times CH$، پس طبق (۲) داریم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times CH$

به‌عبارت‌دیگر **مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده (هر کدام از اضلاع) در ارتفاع نظیرش.** دقت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر هر کدام از اضلاع قائم را قاعده بگیریم، ارتفاع نظیر آن، ضلع دیگر قائم است.



قرارداد، مطابق شکل، مثلث ABC با اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ مفروض است. در این صورت اندازه‌ی ارتفاع AH نظیر ضلع $BC = a$ را با h_a نشان می‌دهیم:

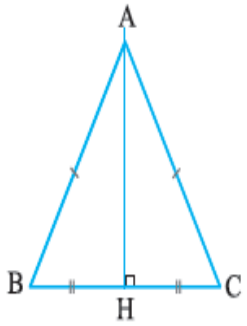
به همین ترتیب اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AC = b$ را با h_b و اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AB = c$ را با h_c نمایش خواهیم داد. در این صورت داریم:

$$\boxed{S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} a h_a = \frac{۱}{۲} b h_b = \frac{۱}{۲} c h_c}$$

نتیجه‌بسیارمهم طبق فرمول مساحت مثلث، حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع نظیرش، دو برابر مساحت مثلث است:

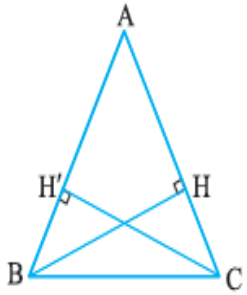
$$ah_a = bh_b = ch_c = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

در مثلث متساوی‌الساقین:



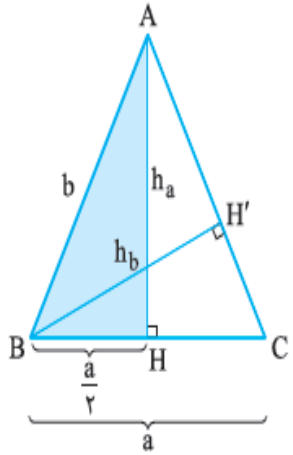
۱) ارتفاع وارد بر قاعده، طول قاعده را نصف می‌کند.

$$AB = AC, AH \perp BC \rightarrow BH = HC = \frac{BC}{۲}$$



۲) طول ارتفاع وارد بر ساق‌ها، با یکدیگر برابرند.

$$AB = AC, BH \perp AC, CH' \perp AB \rightarrow CH' = BH$$

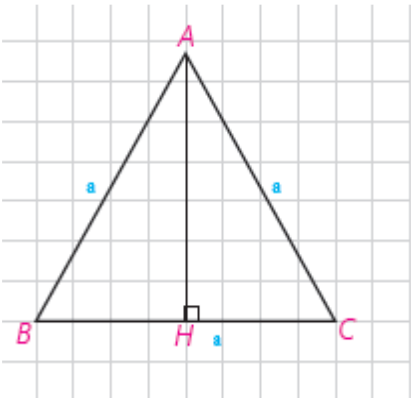


اگر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی را a و ارتفاع وارد بر آن را h_a و هم‌چنین ساق این مثلث را b و ارتفاع وارد بر ساق را h_b بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{ABH}: b^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + h_a{}^۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: ah_a = bh_b = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

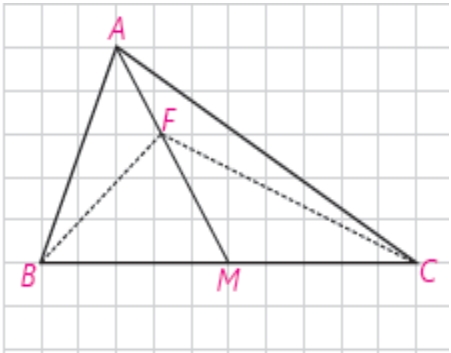
سوال 4:



فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

به کمک قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$.

سوال 5:



نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟

سوال 6:

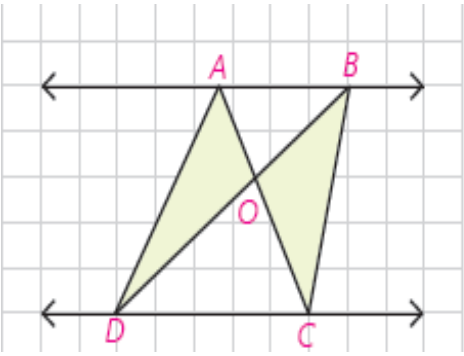
نشان دهید اگر وسط های سه ضلع مثلث را بهم متصل کنیم، چهار مثلث هم نهشت پدید می آید که مساحت های یکسانی دارند.

سوال 7:

نشان دهید سه میانه هر مثلث همرس در نقطه ای درون مثلث همرس اند. بطوریکه فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر

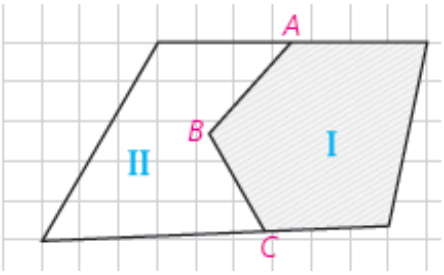
$\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این این ضلع است، و فاصله اش تا هر راس اندازه میانه نظیر آن راس است.

توجه:



ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$.
چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

مسئله:



در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

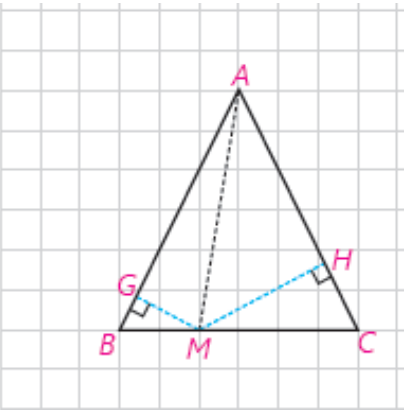
سوال 8:

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB = AC است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

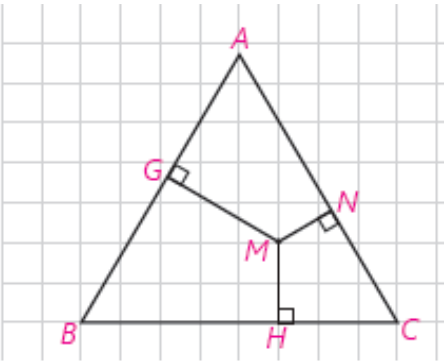
مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.

چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



سوال 9:

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a درنظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC ، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



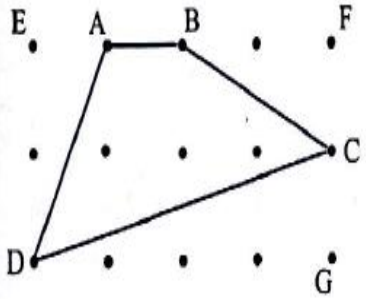
سوال 10:

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۴،۲ و ۶ باشند. اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.

نقاط شبکه‌ای و مساحت

قضیه‌ی پیک (pick)

اگر یک شبکه از نقاط داشته باشیم به طوری که فاصله‌ی عمودی و افقی هر دو نقطه‌ی مجاور آن برابر یک واحد باشد، آن‌گاه مساحت چندضلعی که رأس‌های آن، نقاط این شبکه هستند به شرح زیر به دست می‌آید:



مساحت چندضلعی: $S = m + \frac{n}{۲} - ۱$

m: تعداد نقاطی که داخل چندضلعی قرار دارند.

n: تعداد نقاطی که روی محیط چندضلعی قرار دارند.

به طور مثال برای شکل فوق داریم:

$S = ۳ + \frac{۴}{۲} - ۱ = ۳ + ۲ - ۱ = ۴$

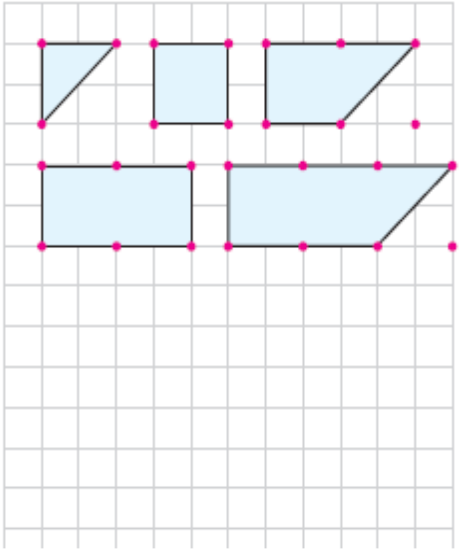
تمرینات:

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳ــ در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است،
یعنی $i = ۰$ و تعداد نقاط مرزی، ..... ، $b = ۳، ۴، ۵$.



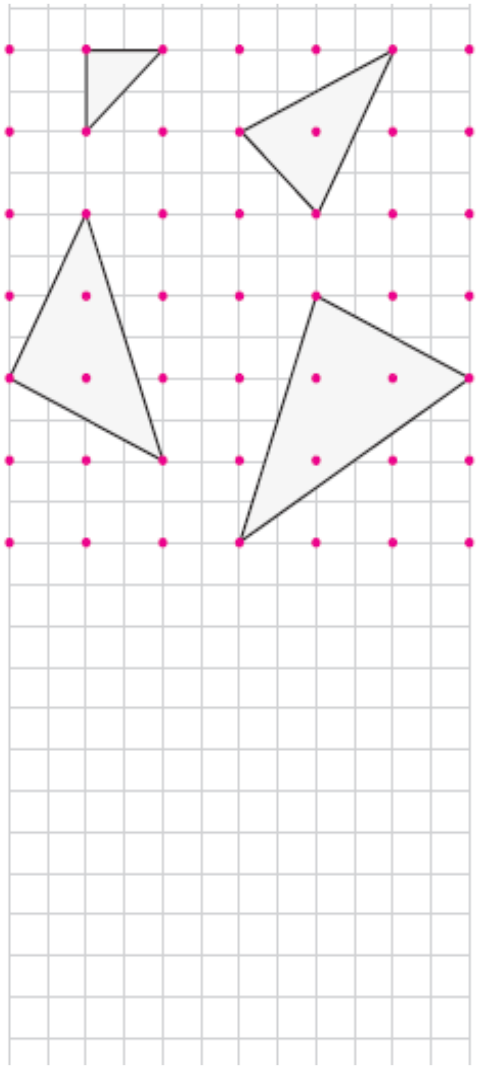
جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$i = ۰$ ، $b = ۳، ۴، ۵$ ، .....

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S = \frac{b}{....} - ..... + ۰$



۴ــ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای $b = ۳$ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید.

(نتیجه‌گیری $S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)

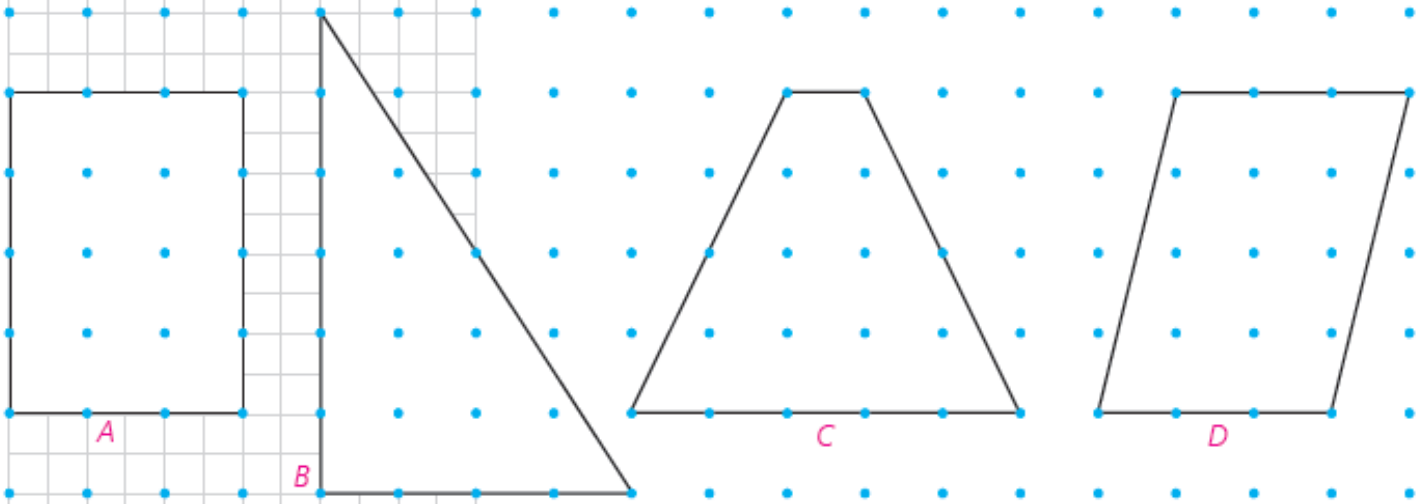
تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲} - ۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$				

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$S = \frac{b}{....} - ..... + ...$$

کار در کلاس

۱ــ چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر درنظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.

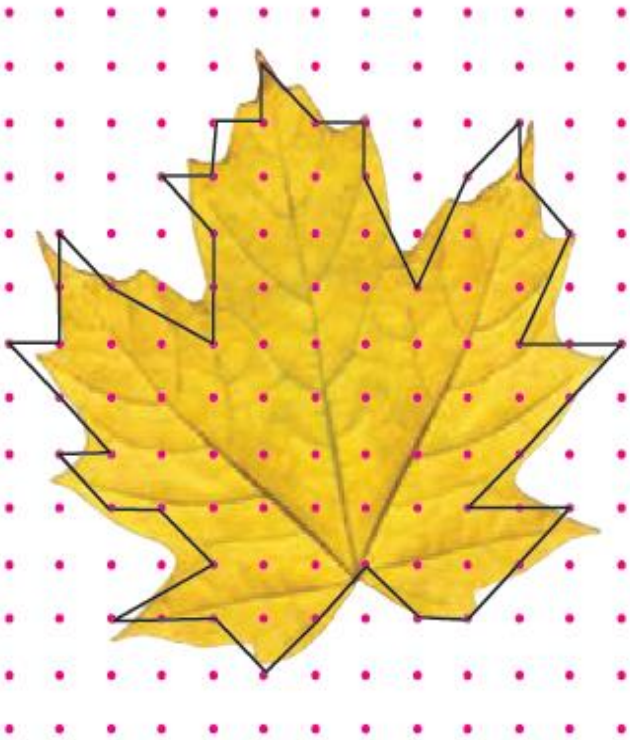


چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				

کار در کلاس

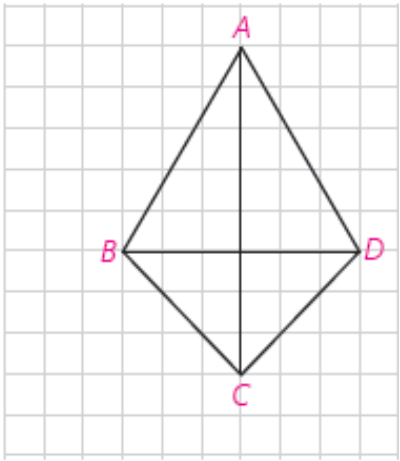
اگر فاصلهٔ نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحهٔ شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

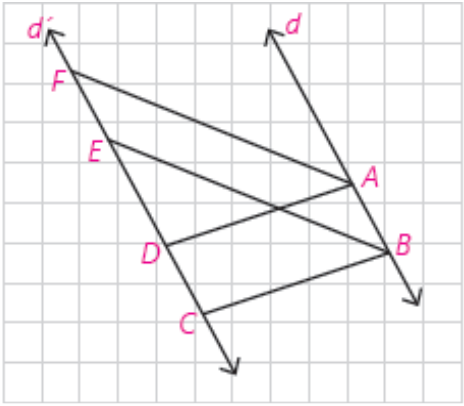


تمرین

۱ــ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

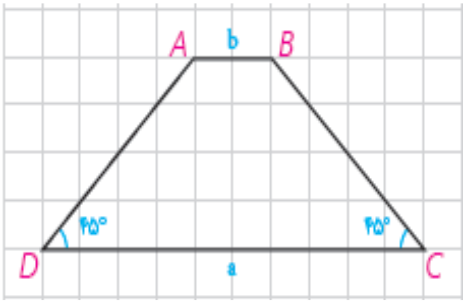


۲ــ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای ∠A و ∠C است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

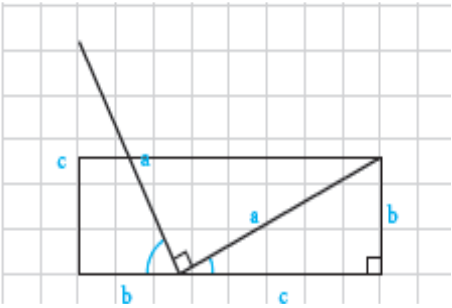


۳ــ در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هردو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟

۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

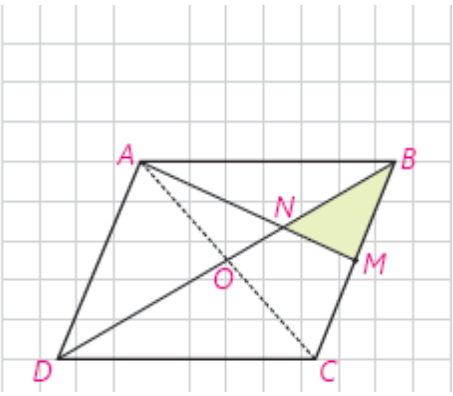


۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

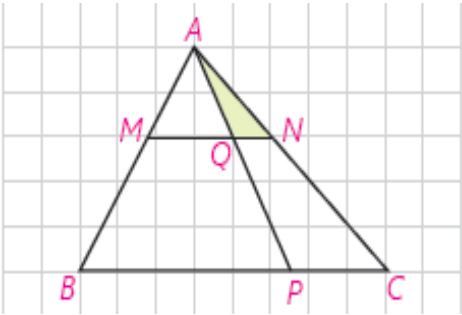


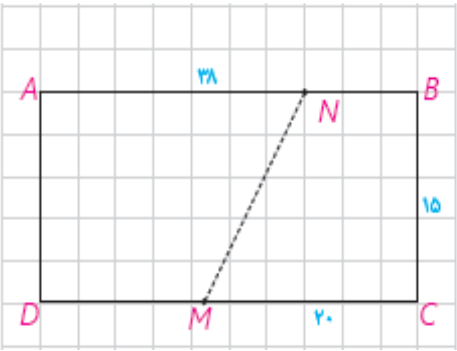
۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$.



۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۲}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

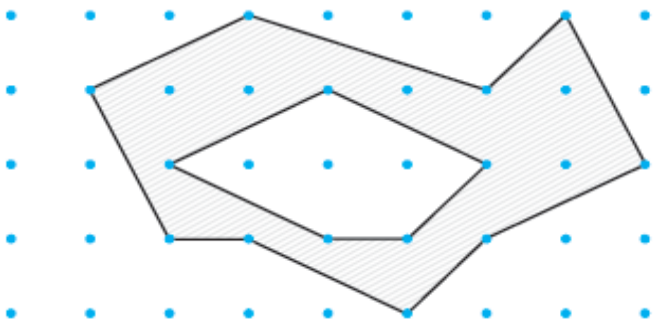




۸ــ زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به‌طور مساوی در آن شریک‌اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطهٔ M که MC = ۲۰ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعهٔ با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

۹ــ سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه است.

۱۰ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.



۱۱ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۲ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

یادداشت:

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

1—درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

1) تعداد نقاطی که از n نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست ، می گذرد برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.
2) مستطیل ، متوازی الاضلاعی است که حد اقل یکی از زاویه های آن قائمه باشد.
3) هر لوزی یک مربع است.
4) تمام مربع ها، متوازی الاضلاع هستند.
5) اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

2—گزینه درست را انتخاب کنید:

1) تعداد قطرهای یک nضلعی محدب از سه برابر تعداد اضلاع، پنج واحد بیشتر است. مقدار n کدامست؟
الف) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11
2) اگر در یک چند ضلعی دو زاویه قائمه باشند ، آن چندضلعی:
الف) مربع است ب) مستطیل است ج) الف و ب د) به طورقطع مشخص نیست
3) در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دوبدو موازیند، در این صورت آن چهارضلعی
الف) متوازی الاضلاع است ب) مربع است ج) مستطیل است د) لوزی است
4) دو قطر یک چهارضلعی برابرند، در این صورت این چهارضلعی
الف) متوازی الاضلاع است ب) مستطیل است ج) ذوزنقه متساوی الساقین است د) نامشخص است
5) در یک n ضلعی محدب، تعداد اضلاع و قرها روی هم 66 است. از هر ردس چند قطر می گذرد؟
الف) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11
6) وسط های اضلاع یک چهارضلعی محدب را متوالیا به هم وصل کرده ایم تا یک چهار ضلعی جدیدی به دست آید. از تقاطع نیمساز های داخلی این چهار ضلعی جدید کدام شکل پدید می اید؟
الف) مربع ب) مستطیل ج) متوازی الاضلاع د) لوزی
7) طول یک مستطیل دو برابر عرض آن است. نیمسازهای زوایای مستطیل را رسم می کنیم، محیط مستطیل چند برابر محیط مربع ایجاد شده در درون آن است؟
الف) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ب) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ج) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ د) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3— جای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید:

1) تعداد قطرهای یک nضلعی محدب برابر است با .....

2) در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه وتر برابر است با .....

3) در هر لوزی، قطرها ..... یکدیگرند و روی ..... زاویه ها می باشند.

4) در متوازی الاضلاع ، قطرها ..... یکدیگرند و لزوما با هم ..... نیستند.

5) مربع، چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن ..... و ..... یک زاویه قائمه دارد.

از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل ، یک مربع بوجود می آید . اگر ابعاد مستطیل 5 و 10 باشد, محیط مربع حاصل برابر است با .....

6) در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه 30° ..... وتر است و ضلع روبرو به زاویه 45° ..... وتر است و ضلع روبرو به زاویه 60° ..... وتر است.

4-اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

1) چندضلعی
2) قطر چند ضلعی
3) چندضلعی محدب
4) ذوزنقه

5- ثابت کنید اگردر یک چهارضلعی هردو زاویه مقابل هم اندازه باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

6- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، دو زاویه مجاور، مکملند.

7- ثابت کنید چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و برابر باشند، متوازی الاضلاع است.

8- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

9-ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه، دو زاویه مجاور به یک قاعده برابر باشند، آن ذوزنقه متساوی السقین است.

10- ثابت کنید در هر لوزی، قطرها عمود منصف یکدیگرند و روی نیمساز زاویه ها می باشند.

11- نشان دهید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع، یک مستطیل پدید می آید.

12- نشان دهید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می آید.

13- نشان دهید اگر در مثلث قائم الزاویه ای یک زاویه 15° باشد، در این صورت ارتفاع وارد بر وتر برابر است با ربع وتر.

14-نشان دهید اگر از به هم وصل کردن متوالی اوساط یک چهارضلعی دلخواه، یک متوازی الاضلاع به دست می آید.

مساحت و کاربردهای آن

15- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

هندسه پایه دهم

تدوین و گردآوری: ولی زاده

کانال تلگرام: *@mathvalizadeh*

1) اگر دو قطر یک ذوزنقه قائم الزاویه بر هم عمود باشند، ارتفاع واسطه ی هندسی بین دو قطعه است.

2) اندازه دو ضلع قائمه از مثلث قائم الزاویه ای 8 و $2\sqrt{11}$ است. فاصله ی نقطه ی تلاقی میانه ها از وسط وتر این مثلث $\frac{1}{3}$ وتر است

16- گزینه درست را انتخاب کنید:

1) در یک لوزی اندازه هر ضلع 10 و نسبت اندازه های دو قطر 3 به 4 است. مساحت لوزی کدام است؟

الف) 96 ب) 108 ج) 24 د) 48

2) در یک کایت اندازه ی اضلاع 17 و 10 و قطر بزرگ 21 است. مساحت کایت کدام است؟

الف)154 ب) 172 ج) 168 د) 196

3) یک متوازی الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم الزاویه مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت یک مربع و یک مثلث قائم الزاویه 64 و 24 باشد، محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

الف) 32 ب) 36 ج) 48 د) 54

4) در مثلث قائم الزاویه ای نسبت دو قاعده $\frac{2}{3}$ است. اگر وسط قاعده ی کوچک را به وسط ساق قائم وصل کنیم، مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه ی اصلی است؟

الف) $\frac{1}{10}$ ب) $\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{6}$

5) در یک ذوزنقه ی متساوی الساقین اندازه ی دو قاعده 5 و 9 و طول ساق 6 واحد است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

الف) $14\sqrt{6}$ ب) $21\sqrt{2}$ ج) $21\sqrt{3}$ د) $28\sqrt{2}$

17– جای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید:

1) در هر چهار ضلعی که قطرها بر هم عمود باشند، مساحت برابر است با .....

2) اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث ..... به دست می آید که دارای ..... برابر می باشند.

3) سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون مثلث ..... ، به طوری که فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر ..... اندازه میانه ی نظیر این ضلع است و فاصله اش از هر رأس ..... اندازه میانه ی نظیر این رأس است.

4) در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده ..... برابر است با .....

5) در هر مثلث متساوی الساقین، تفاضل قدر مطلق فاصله های هر نقطه روی امتداد قاعده از خط های شامل دو ساق برابر است با .....

6) مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر است با .....

7) یک میانه در هر مثلث ، آن را به دو مثلث با ..... برابر تقسیم می کند.

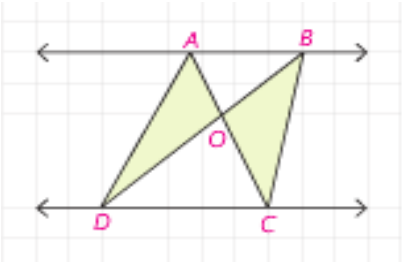
18- نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند.

19- نشان دهید اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث همنهشت به دست می آید که دارای مساحت های برابر می باشند.

20–نشان دهید سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون مثلث همرسند، به طوری که فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه ی نظیر این ضلع است و فاصله اش از هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه ی نظیر این رأس است.

21– با رسم سه میانه مثلث، نشان دهید سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

22– فرض کنیم دو خط **AB** و **CD** موازی باشند به طوریکه دو خط **AC** و **BD** در نقطه ای مانند **O** متقاطع باشند. نشان دهید مساحت های دو مثلث **AOD** و **BOC** برابرند.



23– نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر است با مقداری ثابت و این مقدار ثابت را بدست آورید.

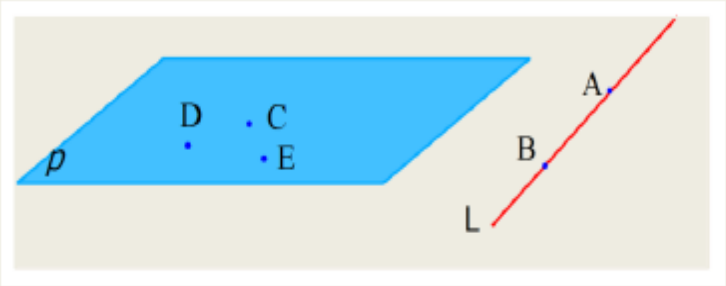
24– نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، تفاضل قدر مطلق فاصله های هر نقطه روی امتداد قاعده از خط های شامل دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.

25– نشان دهید مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر است با مقداری ثابت و این مقدار ثابت را بدست آورید.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

درس اول : خط، نقطه و صفحه

نقطه خط و صفحه از مفاهیم مهم هندسی هستند که معمولاً به صورت زیر نمایش داده می شوند .



خط AB یا BA و یا خط L

صفحه DCE یا CDE یا ... و یا صفحه P

توجه : خط صفحه نامحدودند و ضخامتی هم ندارند .

اوضاع نسبی دو خط در صفحه

۱. **موازی منطبق**: دو خط در حقیقت یک خط می باشند.

۲. **موازی غیرمنطبق**: دو خط هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.

۳. **متقاطع**: دو خط در یک نقطه مشترکند. این نقطه را نقطه ی تقاطع دو خط می نامند.

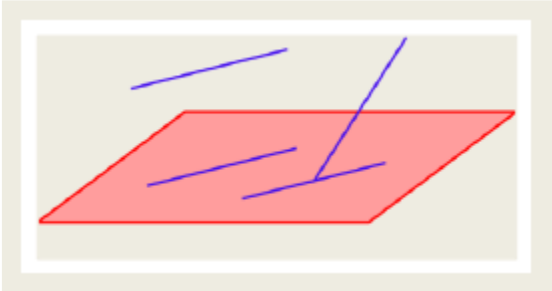
حالت های مختلف دو خط در فضا :

۱. **موازی منطبق**: دو خط در حقیقت یک خط می باشند.

۲. **موازی غیرمنطبق**: دو خط هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند و می توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.

۳. **متقاطع**: دو خط در یک نقطه مشترکند و می توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.

۴. **متنافر**: دو خط هیچ نقطه ی مشترکی ندارند و نمی توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.



فعالیت : در شکل بالا خطوط را نام گذاری کنید و برای هر حالت دو خط در فضا مثالی از این خطوط بزنید .

توجه:

در این فصل دانستن اصول زیر ضروری می باشد.

اصل۱: از هر دو نقطه ی متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می گذرد. یعنی اولاً یک خط در فضا وجود دارد که از دو نقطه ی متمایز در فضا می گذرد؛ ثانیاً این خط یکتاست، یعنی اگر دو خط از دو نقطه ی مشخص در فضا بگذرند حتماً بر هم منطبقند.

اصل۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می گذرد.

اصل۳: در هر صفحه حداقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند.

اصل۴: حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.

اصل۵: اگر دو نقطه ی متمایز از خطی در یک صفحه باشد، آن خط به تمامی درون صفحه قرار می گیرد.

- خط و صفحه از هر طرف نامحدود می باشند؛ بنابراین نمی توان تمام آن ها را در یک شکل نمایش داد.

اصل۶: اگر دو صفحه ی متمایز در یک نقطه مشترک باشند، آنگاه در یک خط مشترک خواهند بود.

- **اصل توازی اقلیدس در صفحه**: از هر نقطه خارج یک خط در صفحه یک و فقط یک خط به موازات آن خط می گذرد.

اصل۷ (اصل توازی اقلیدس در فضا): از هر نقطه خارج یک خط در فضا یک و فقط یک خط به موازات آن خط می گذرد.

سوال:

در صفحه از هر نقطه چند خط می گذرد ؟ در فضا چطور ؟

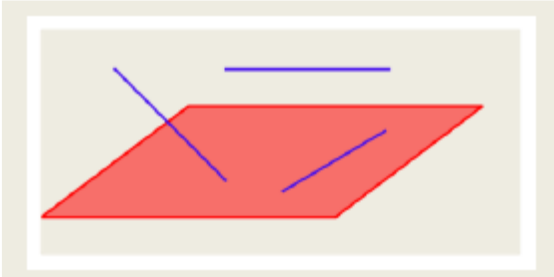
در صفحه از یک نقطه خارج خط چند خط موازی آن می توان رسم کرد ؟ در فضا چطور ؟

آیا در فضا هم دو خط موازی با یک خط خود با هم موازی هستند ؟

آیا در فضا هم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند ؟

حالت های مختلف خط و صفحه در فضا :

۱. **موازی منطبق**: در این حالت خط کاملاً درون صفحه قرار می گیرد.
۲. **موازی غیرمنطبق**: در این حالت خط و صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. **متقاطع**: در این حالت خط و صفحه در یک نقطه با هم اشتراک دارند؛ این نقطه را نقطه ی تقاطع خط و صفحه می نامند.



سوال:

از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد ؟

ازدو خط متقاطع در فضا چند صفحه می گذرد ؟از دو خط موازی چطور ؟

از یک نقطه خارج صفحه چند خط موازی آن صفحه می توان رسم کرد ؟

دو خط L و d در فضا با هم موازیند .

اگر صفحه ای موازی یک از آنها باشد آیا الزاماً با دیگری موازی است ؟

اگر صفحه شامل یکی از آنها باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

اگر صفحه با یکی از آنها متقاطع باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

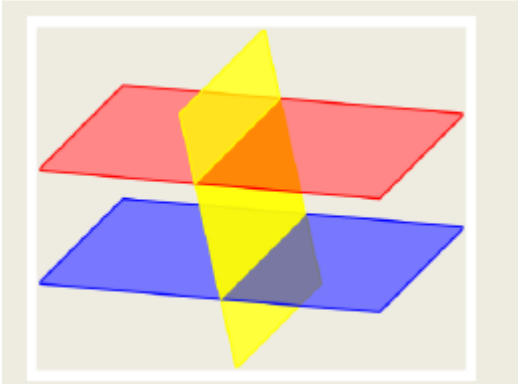
حالات نسبی دو صفحه

۱. **موازی منطبق**: دو صفحه در حقیقت یک صفحه می باشند.
۲. **موازی غیرمنطبق**: دو صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. **متقاطع**: دو صفحه در یک خط مشترک می باشند؛ این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.

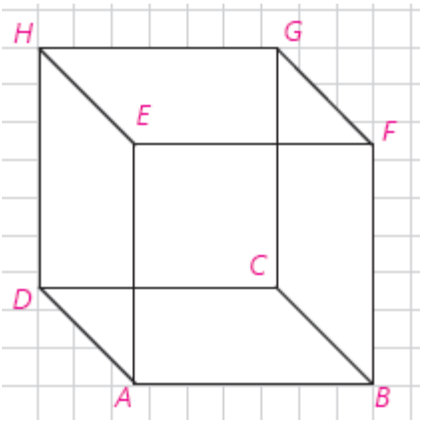
حالت های مختلف دو صفحه در فضا :

۱. **موازی منطبق**: دو صفحه در حقیقت یک صفحه می باشند.
۲. **موازی غیرمنطبق**: دو صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. **متقاطع**: دو صفحه در یک خط مشترک می باشند؛ این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**



سوال:



به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چطور؟

EF و GC چطور؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

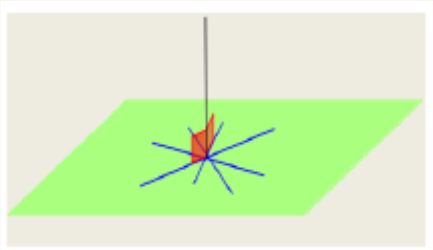
بر کدام منطبق است؟

د) دو صفحهٔ موازی و دو صفحهٔ متقاطع نام ببرید.

تعامد خط و صفحه :

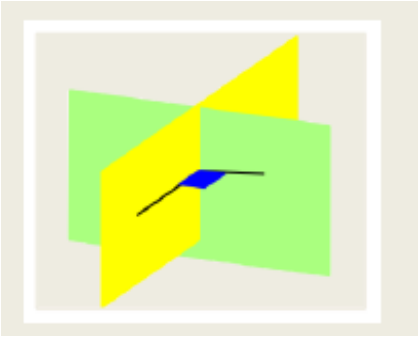
اگر خطی در یک نقطه صفحه را قطع کند بر آن صفحه عمود است ،هرگاه بر تمام خطوط آن صفحه که از این نقطه می گذرند عمود باشد .

می توان نشان داد اگر این خط فقط بر دو خط متقاطع از صفحه عمود باشد ، بر صفحه عمود است .



تعامد دو صفحه :

دو صفحه بر هم عمودند هرگاه هر یک شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است .



سوال:

می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

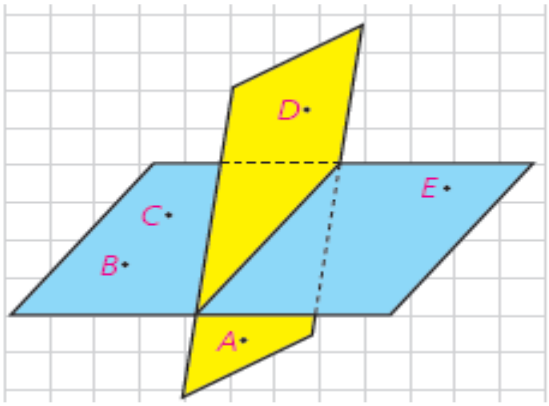
ب) آیا دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

ج) دو صفحهٔ عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

تمرین



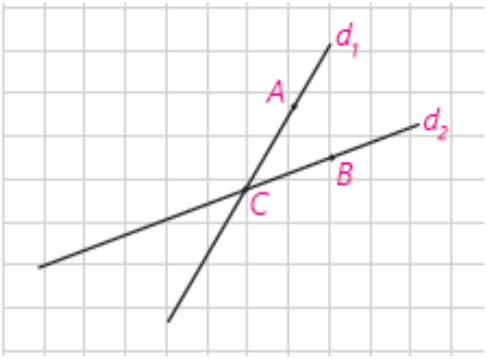
۱ــ با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :

الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.

ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.

د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟



۲ــ خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل‌اند. صفحهٔ P را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.

الف) صفحهٔ P شامل نقطهٔ C است.

ب) صفحهٔ P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.

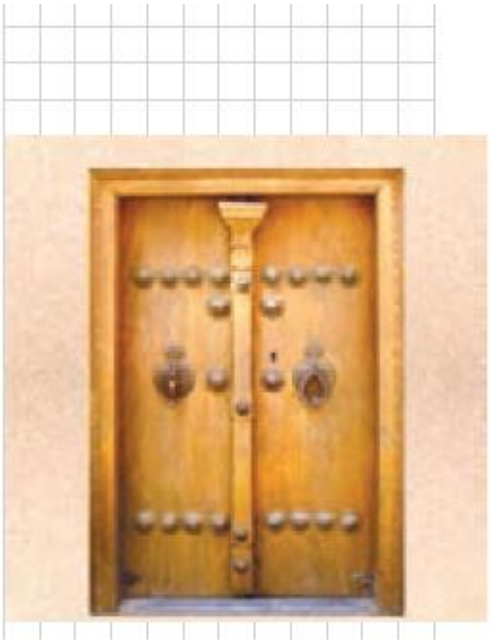
ج) صفحهٔ P شامل نقاط C و B و A است.

د) صفحهٔ P شامل خط d_1 و نقطهٔ B است.

۳ــ دو صفحهٔ P_1 و P_2 را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

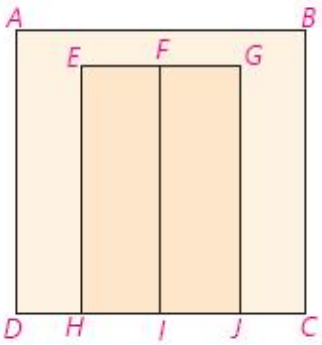
الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.

ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.



۴ــ شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دو به‌دو نسبت به هم بررسی کنید.



ب) خطوط FI و BC

ج) خطوط FI و AB

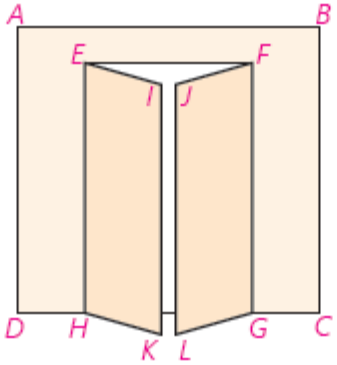
د) خطوط FG و EF

هـ) خطوط FG و HI

و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۵ــ تجسم کنید دو لنگهٔ در هرکدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH

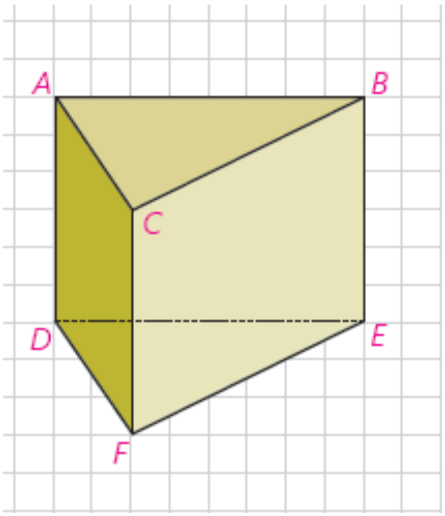
ج) خط JL و صفحهٔ EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

هـ) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ت) خطوط FJ و BC



۷ــ منشور سه‌پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

الف) سه جفت خط متمایز دو به‌دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به‌دو متنافر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دو به‌دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط همرس نام ببرید.

هـ) سه جفت خط و صفحهٔ موازی نام ببرید.

و) دو صفحهٔ موازی نام ببرید.

ز) سه صفحهٔ دو به دو متقاطع نام ببرید.

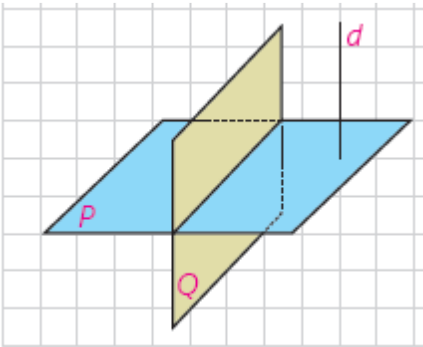
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۸ــ از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

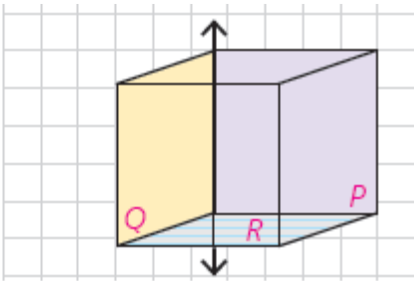
۹ــ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد.



۱۰ــ دو صفحه P و Q برهم عمودند و خط d نیز بر صفحهٔ P عمود است. این خط نسبت به صفحهٔ Q چه وضعی دارد؟



۱۱ــ دو صفحهٔ متقاطع P و Q بر صفحهٔ R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحهٔ R چه وضعیتی دارد؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

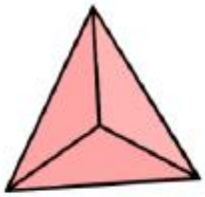
درس دوم

تفکر تجسمی

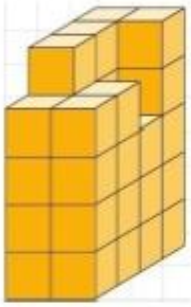
در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع مورد نظر فکر کنیم.

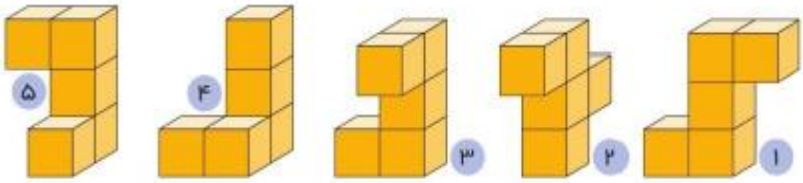
در این درس هدف تجسم اجسام و اشکال است . به همین دلیل ما فقط سعی داریم با مثال های متعدد در این زمینه به تبحر کافی برسیم .

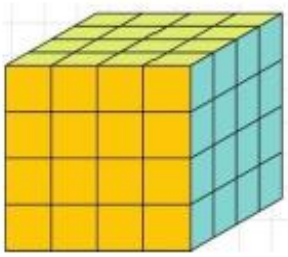
۱) شکل زیر کدام شکل هندسی است که از بالا به آن نگاه شده ؟



۲) کدام گزینه شکل سمت چپ را کامل می کند ؟







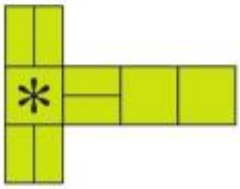
۳) در مکعب مقابل که تمام وجه های آن رنگ شده است .

الف) چند مکعب رنگ شده داریم ؟

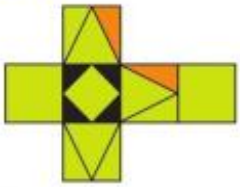
ب) چند مکعب فقط دو وجه رنگ شده دارد ؟

ج) چند مکعب فقط ۳ وجه رنگ شده دارد ؟

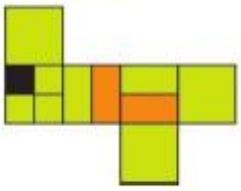
۴) در هر مورد مکعب گسترده سمت چپ مربوط به کدام گزینه است ؟



۱) ۲) ۳)

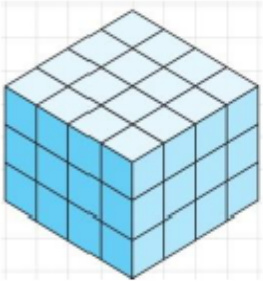


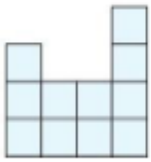
۱) ۲) ۳)



۱) ۲) ۳)

۵) در شکل مقابل حداقل و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به صورت زیر شود .

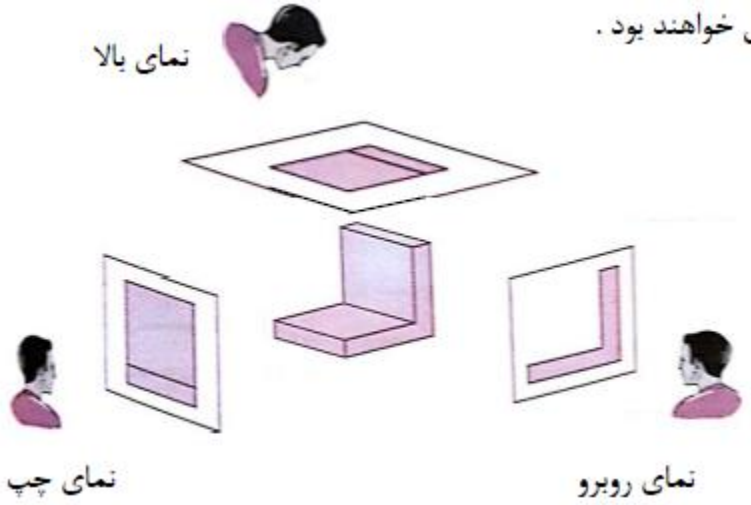




** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

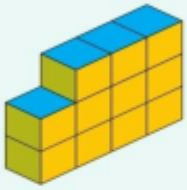
سوال : چه چیزی باعث این خطای دید شده است ؟

نتیجه : با توجه به نمای دید ما اجسام دارای شکل های مختلفی خواهند بود .



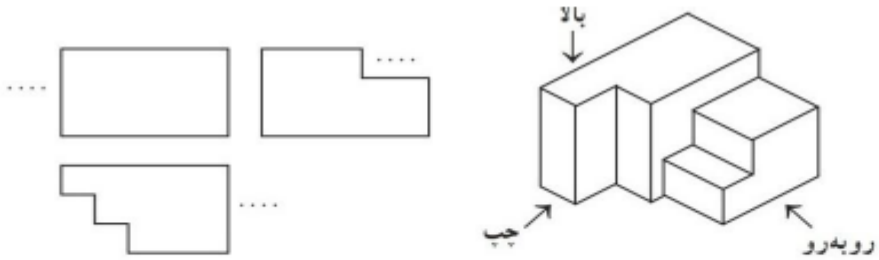
یادداشت

۶) نماهای هر شکل را در مقابل آن درون جدول رسم کنید .

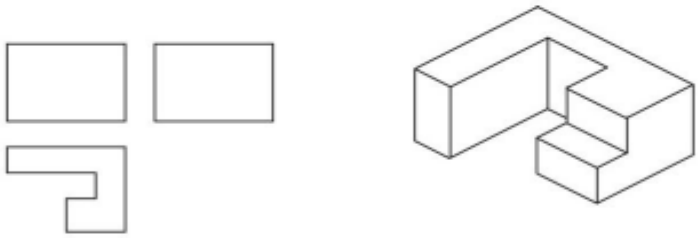
نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			

۷) سه نمای روبرو و راست و چپ اجسام زیر رسم شده اند . مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام نما است .

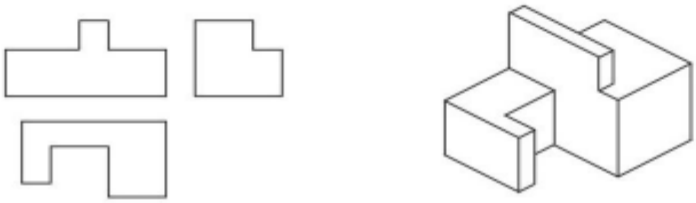
الف)



ب)



ج)



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

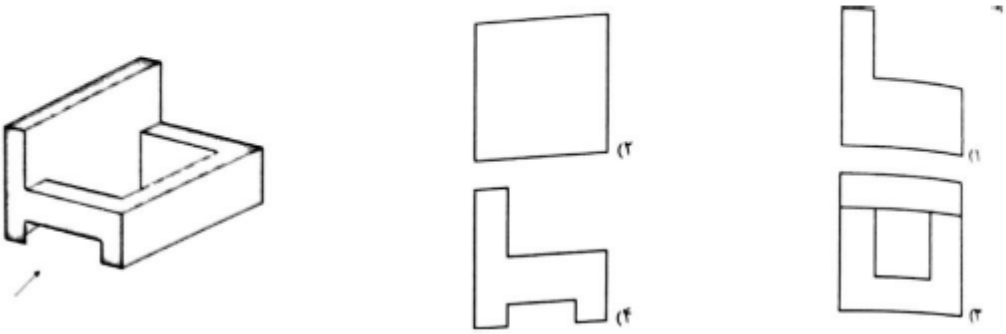
هندسه پایه دهم

تدوین و گردآوری: ولی زاده

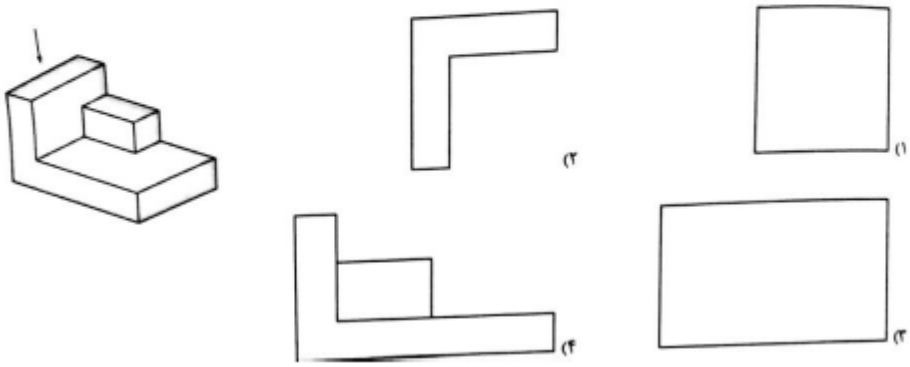
کانال تلگرام: @mathvalizadeh

تمرین : .....

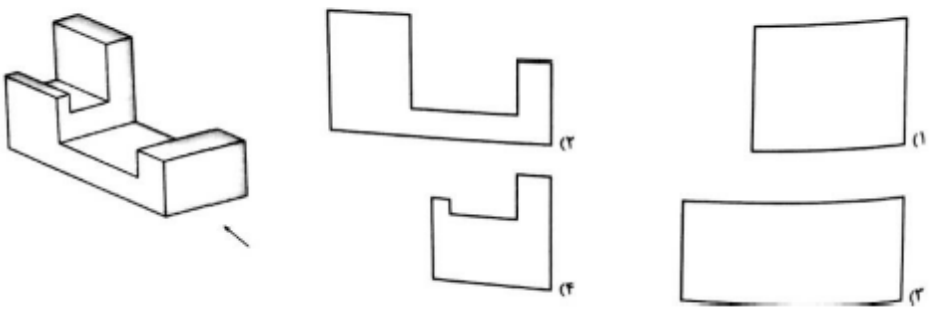
۱) نمای چپ شکل مقابل کدام است ؟



۲) نمای بالای شکل مقابل کدام است ؟

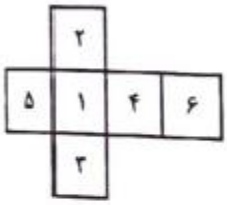


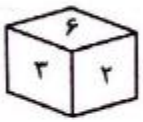
۳) نمای روبروی شکل مقابل کدام است ؟



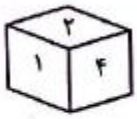
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

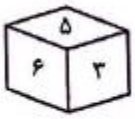
۴) کدام مکعب مربوط به گسترده مقابل است ؟

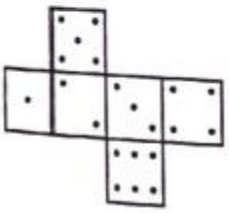


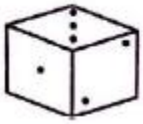
۱) 

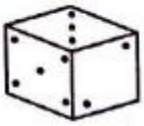
۲)

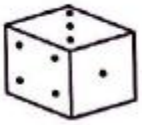
۳) 

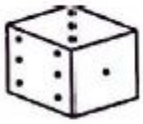
۴) 



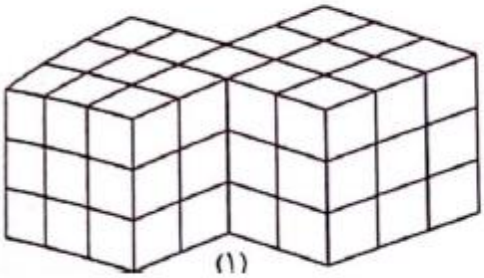
۱) 

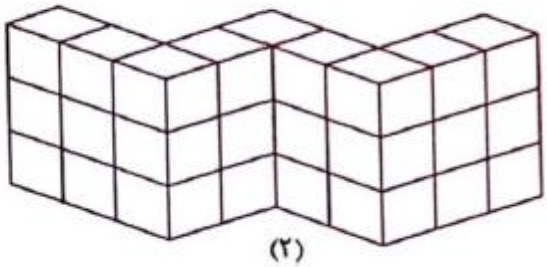
۲) 

۳) 

۴) 

۵) چند مکعب کوچک از شکل (۱) برداشته شود تا شکل (۲) بدست بیاید ؟

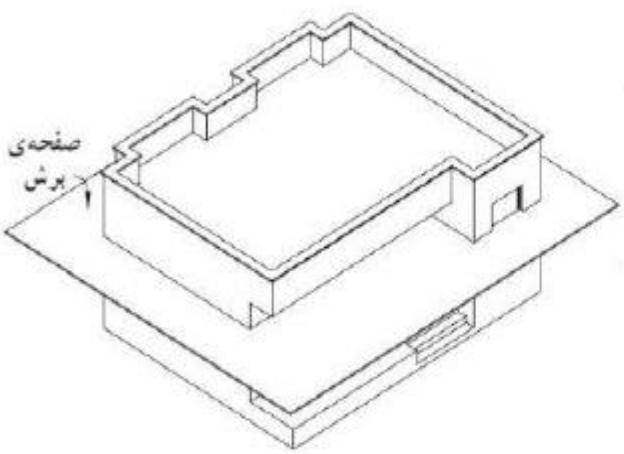

(۱)

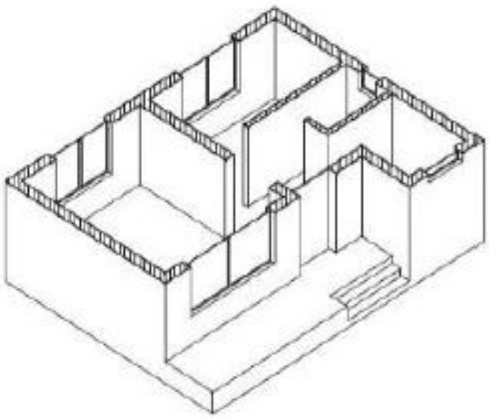

(۲)

درس سوم : برش

برش یک علم بسیار کاربردی در علوم مکانیک ، معماری ، پزشکی ، زمین شناسی و ..... است .

به کمک برش های مختلف می توان درک درست تری از اجسام به دست آورد به عنوان مثال به شکل های زیر که مربوط به علوم مختلف هستند نگاه کنید .





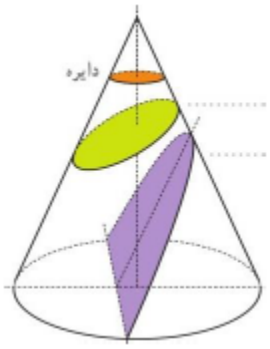
سطح مقطع : شکلی که از برخورد یک صفحه با یک شکل هندسی حاصل می شود را سطح مقطع می نامند.

سوال : اگر صفحه ای به صوررت افقی ، عمودی یا مایل بر یک کنده برش ایجاد کند . سطح مقطع های ایجاد شده چه شکل هایی خواهند بود ؟

هندسه پایه دهم **تدوین و گردآوری: ولی زاده**

کانال تلگرام: *@mathvalizadeh*

سوال : یک صفحه به صورت های زیر با یک مخروط برخورد می کند . سطح مقطع حاصل چه شکلی است ؟



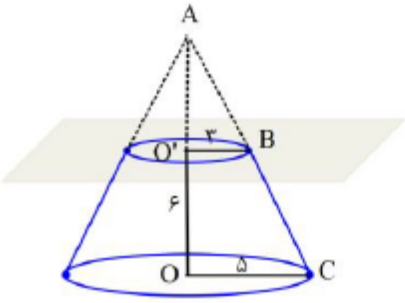
الف) افقی : سطح مقطع ..... است .

ب) مایل به طوری که قاعده را قطع نکند : سطح مقطع ..... است .

ج) مایل به طوری که موازی یال باشد : سطح مقطع ..... است .

سوال : اگر صفحه ای عمودی این دو استوانه را قطع کند چه سطح مقطعی حاصل می شود ؟

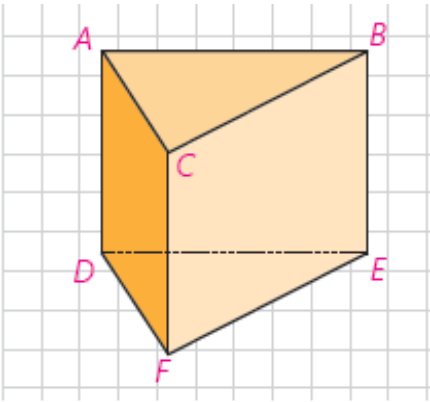
سوال : صفحه ای افقی یک مخروط را قطع و یک مخروط ناقص درست کرده است . حجم این مخروط ناقص را بیابید .



سوال : صفحه ای به فاصله h از مرکز کره آن را قطع کرده است . مساحت سطح مقطع چقدر است ؟

سوال : دو دایره با هم برخورد کرده اند . اگر تمام نقاط مشترک آنها را به مرکز یکی از آنها وصل کنیم چه شکلی حاصل می شود ؟

تمرین

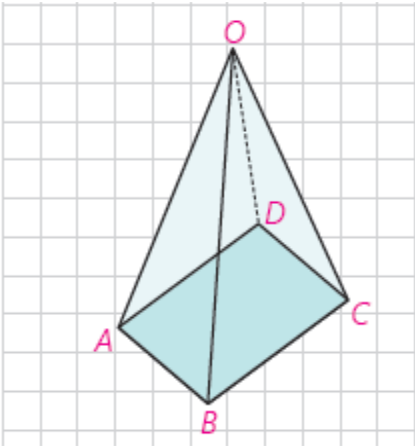


۱ــ فرض کنید منشور زیر، یک قطعهٔ چوبی توپر باشد. این قطعهٔ چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطهٔ مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟

الف) M، N و P وسط پاره‌خط‌های BE، CF و AD

ب) C، D و E

ج) C، F و Q (وسط پاره خط AB)



۲ــ قاعدهٔ هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

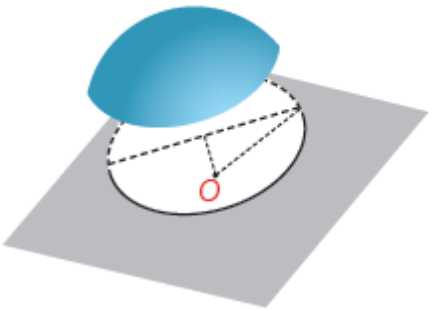
الف) صفحهٔ P بر ارتفاع هرم عمود باشد.

ب) صفحهٔ P از O بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

ج) صفحهٔ P از O نگذرد؛ ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

۳ــ صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است.

اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۴ــ دو کره با شعاع‌های r و r′ یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟
اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

دوران حول محور

از دوران دادن شکل های هندسی دو بعدی می توان جسم های سه بعدی مختلفی را تجسم کرد .

مثلاً از دوران پاره خط عمود بر یک خط حول آن یک دایره بدست می آید .

مثلاً از دوران نیم دایره حول قطر خوش ، کره بوجود می آید .

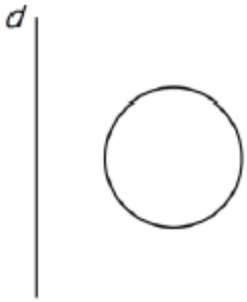
سوال : از دوران یک مستطیل ۲ در ۴ حول طول و عرض آن چه شکل هایی ایجاد می شود ؟

سوال : اگر دو خط متقاطع باشند و یکی حول دیگری دوران کند چه شکلی حاصل می شود ؟

سوال : از دوران مثلث متساوی الساقین حول قاعده چه شکلی پدید می آید ؟

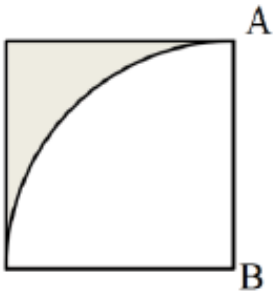
سوال :از دوران ذوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها چه شکلی پدید می آید ؟

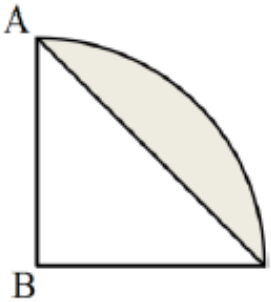
سوال : از دوران دایره حول خط d چه شکلی حاصل می شود ؟



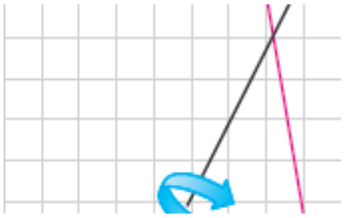
سوال : حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائمه ۳و۴ حول ضلع قائمه کوچکتر را بیابید .

سوال : حجم حاصل از دوران قسمت رنگی هر شکل حول AB چقدر است ؟





تمرین



۱ــ دو خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟

۲ــ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

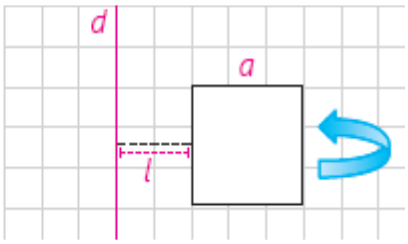
الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن :

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه :

پ) دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها :

ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ آن :

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**



۳ــ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

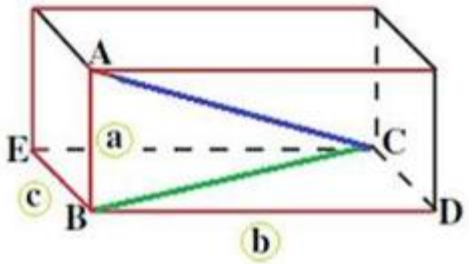
۴ــ شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مطالب اضافی:

فرمولهای مهم فصل چهارم:

روش یافتن طول قطر مکعب مستطیل:



فرض کنید طول یال‌های AB، BD و BE به‌ترتیب a، b و c باشد. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه و AC وتر آن است. از طرف دیگر، مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است.

طول وتر ABC = طول قطر AC

با دو بار استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس می‌توانیم بنویسیم:

و

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

تعریف مکعب: مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند.

توجه: اگر طول یال‌های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن برابر است با: $a\sqrt{3}$

تدوین و گردآوری: ولی زاده

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

حجم مکعب مستطیل:

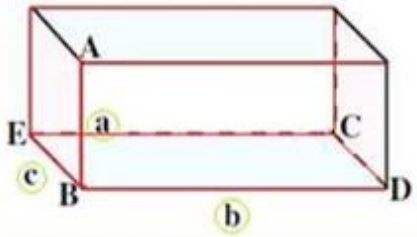
با داشتن طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل، می توان نوشت:

حجم مکعب مستطیل =

مساحت کل مکعب مستطیل:

مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌های مکعب مستطیل را مساحت کل آن می گویند.

با توجه به اینکه در مکعب مستطیل، وجه های روبه رو همنهشت هستند، پس اگر طول و عرض و ارتفاع آن به ترتیب a ، b و c باشند، می توان مساحت کل آن را بصورت زیر نوشت:



مساحت کل

→

توجه: در رابطه ی بالا، اگر به‌جای b و c مقدار a را قرار دهیم، مساحت کل مکعب به طول یال a بدست می آید. $S = ۲(aa + aa + aa) = ۲(۳a^۲) = ۶a^۲$

اندازهء حجم مکعب: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، درنتیجه با استفاده از رابطه‌ی حجم مکعب مستطیل حجم مکعبی به طول یال a برابر است با:

حجم مکعب

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مساله: طول قطر یک مکعب برابر است با $\sqrt{75}$، حجم و مساحت کل این مکعب را بدست آورید.

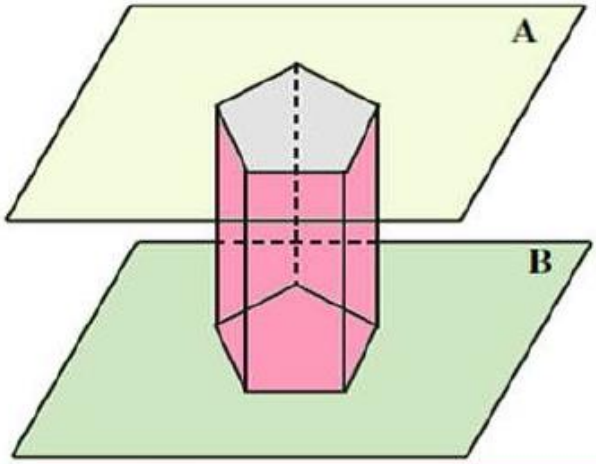
= قطر مکعب

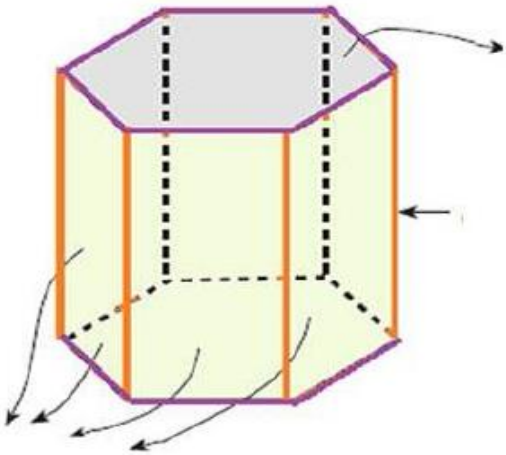
: حجم مکعب

: مساحت کل

تمرین: اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{12}$ باشد مساحت کل و حجم آنرا حساب کنید.

منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی الاضلاع باشند.





دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی الاضلاع هستند، و یال‌های محل تلاقی وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند

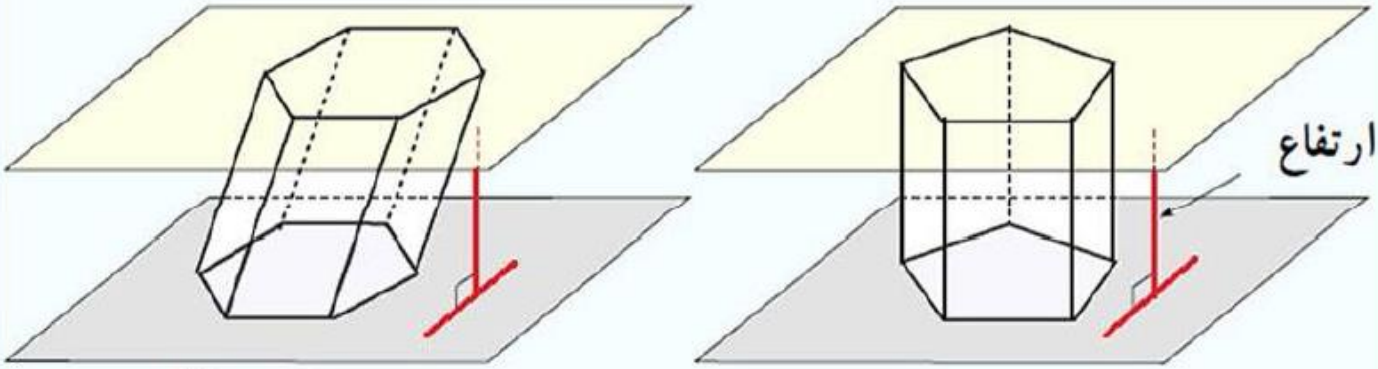
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

ارتفاع منشور

پاره‌خطی که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است

نکته: همه ی یال‌های جانبی منشور با هم موازیند. (می توانید دلیل اش را بیان کنید)

اگر این یال‌ها بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن‌را یک _____ و در غیر اینصورت آن را _____ می‌نامند



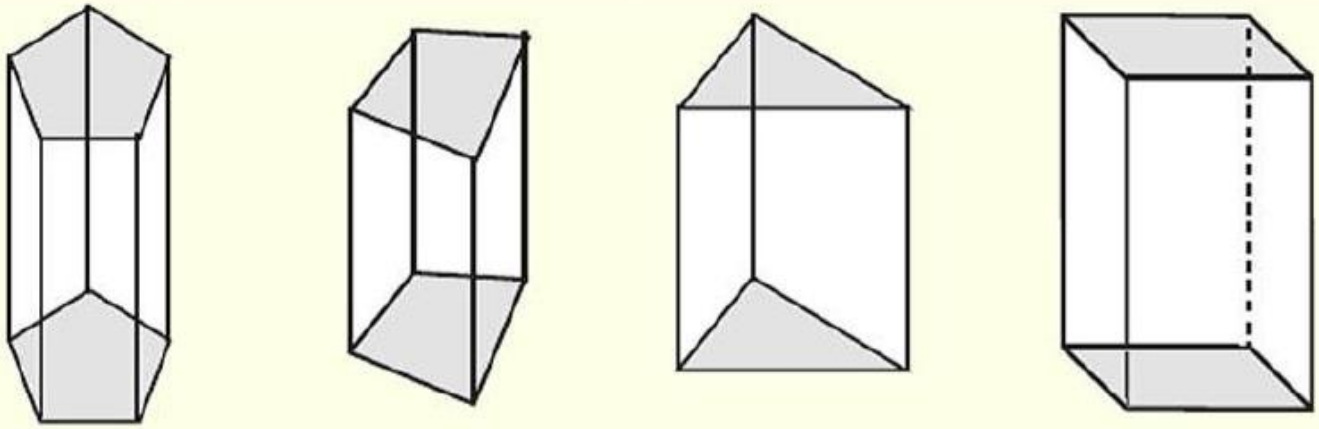
منشور مایل

منشور قائم

نکته: می دانیم که همه وجه های جانبی یک منشور متوازی الاضلاع هستند. حال اگر منشور قائم باشد، این متوازی الاضلاع ها مستطیل خواهند شد.

نامگذاری منشورها:

یک منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. به این صورت که اگر قاعده‌ی یک منشور باشد، آن را می‌نامند و اگر قاعده‌ی یک منشور باشد، آن را می‌نامند



منشور چهارضلعی — منشور مثلثی — منشور چهارضلعی — منشور پنج‌ضلعی

مساحت جانبی و مساحت کل یک منشور:

مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشوررا **مساحت‌جانبی** و مجموع مساحت‌های همه ی وجه‌ها را **مساحت کل** آن می نامند.

نکته: در یک منشور:

= مساحت کل

نکته: اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a، b و c باشند، آنگاه:

مساحت جانبی : $S_h = \mathbf{p} \times \mathbf{h} = ۲(a+b) \times c = ۲(ac+bc)$

$\rightarrow$

مساحت کل : $S = ۲S_{\text{قاعده}} + S_h = ۲(a \times b) + ۲(a+b) \times c$

$= ۲ab + ۲ac + ۲bc = ۲(ab+ac+bc)$

$\rightarrow$